

Antenas Lineales

- Dipolos
 - Dipolos Eléctricamente Cortos
 - Dipolos Rectos.
- Antenas de Cuadro.
- Hélices
- Método de los Momentos.
 - Ecuación de Hallen
 - Ecuación Integral de Pocklington.
 - Ecuación de Shelkunoff
 - Point-Matching.
 - Método de los Residuos Promediados.
 - Método de Galerkin.
 - Modelado de la Fuente.
- Yagis



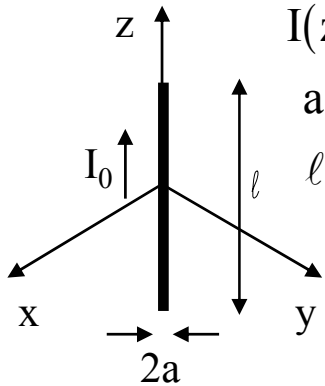
Antenas Lineales

- Bajo esta denominación se estudian las antenas construidas con hilos conductores eléctricamente delgados (de diámetro muy pequeño en comparación con λ). En estas condiciones las corrientes fluyen longitudinalmente sobre la superficie del hilo.
- Para calcular los campos radiados se modelan como una línea de corriente infinitamente delgada coincidente con el eje del conductor real, que soporta en cada punto un valor de corriente idéntico al que transporta la corriente superficial real en el contorno de la sección correspondiente a ese punto.

Potencial Vector Lejano:
$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_{L'} I(\vec{r}') e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}'} d\vec{l}'$$

Dipolos Eléctricamente Pequeños

Dipolos Ideales



$$I(z) = I_0$$

$$a \ll \lambda$$

$$l \ll \lambda$$

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} I_0 \ell \hat{z} \quad \vec{E} = j\eta k I_0 \ell \sin\theta \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \hat{\theta}$$

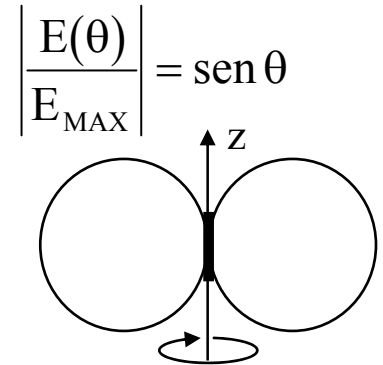
$$P_{\text{rad}} = \int_{4\pi} U(\theta, \phi) d\Omega = \frac{\pi}{3} Z_0 |I_0|^2 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 \quad D_0 = 3/2$$

Resistencia de Radiación

$$R_{\text{rad}} = \frac{2P_{\text{R}}}{|I_0|^2} = 80\pi^2 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2$$



$$\ell = 0,1\lambda \quad R_{\text{rad}} = 8\Omega$$



Resistencia de Pérdidas

$$dR_{\text{perd}} = \frac{dV}{I} = \frac{E_z dz}{2\pi a H_\phi} \Big|_{\rho=a} = \frac{R_s}{2\pi a} dz$$

$$R_s = \frac{E_z(\rho = a)}{H_\phi(\rho = a)} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

$$a \gg \delta$$

$$R_{\text{perd}} = \frac{2P_{\text{perd}}}{|I_0|^2} = \frac{2}{|I_0|^2} \int_1 \frac{1}{2} \frac{R_s}{2\pi a} |I(z)|^2 dz = \frac{\ell}{2\pi a} R_s$$

$$\text{Rendimiento} = \frac{R_{\text{rad}}}{R_{\text{perds}} + R_{\text{rad}}}$$

Látigo de 1 m (1 MHz)
formado por una varilla de
cobre 8 mm

$$R_{\text{rad}} = 0,0088\Omega$$

$$R_{\text{perd}} = 0,0103\Omega$$

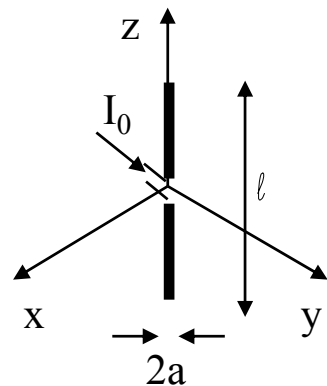
$$\text{Rend} \approx 46\%$$

Dipolos Cortos Reales

Sin Carga Capacitiva (corriente triangular)

$$e^{-jk\hat{r}\cdot\vec{r}'} \approx 1$$

$$\ell < 0,3\lambda \Rightarrow$$

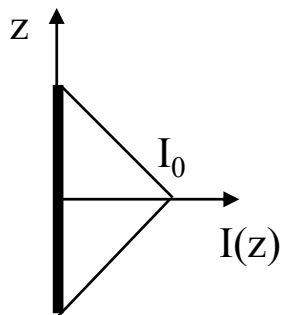


$$\vec{A}_\Delta = \frac{1}{2} \vec{A}_\Pi \quad \vec{E}_\Delta = \frac{1}{2} \vec{E}_\Pi \quad \left| \frac{E_\Delta(\theta)}{E_{\Delta\text{MAX}}} \right| = \text{sen } \theta$$

$$P_{\text{rad}\Delta} = \frac{1}{4} P_{\text{rad}\Pi} \quad D_{0\Delta} = D_{0\Pi} = 3/2$$

Resistencia de Radiación $R_{\text{rad}\Delta} = \frac{1}{4} R_{\text{rad}\Pi} = 20\pi^2 \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2$

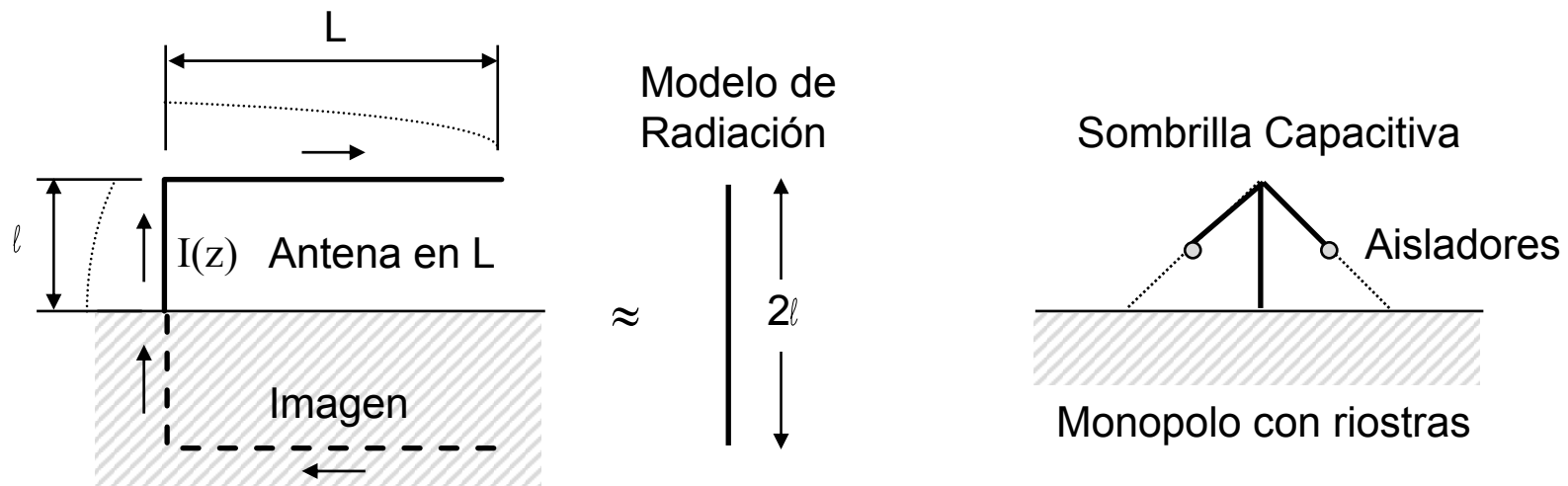
Resistencia de Pérdidas $R_{\text{perd}\Delta} = \frac{1}{3} R_{\text{perd}\Pi} = \frac{\ell}{6\pi a} R_S$



- Eficiencia menor que en el caso ideal (corriente uniforme).
- $R_{\text{in}} = R_{\text{rad}} + R_{\text{perd}}$ casi 4 veces menor.
- $Z_{\text{in}} = R_{\text{in}} + jX_C$, $X_C = -1/\omega C \gg R_{\text{in}}$
- Difícil de adaptar. Bandas estrechas.

Monopolos Cortos Reales

Con Carga Capacitiva (corriente uniformizada)



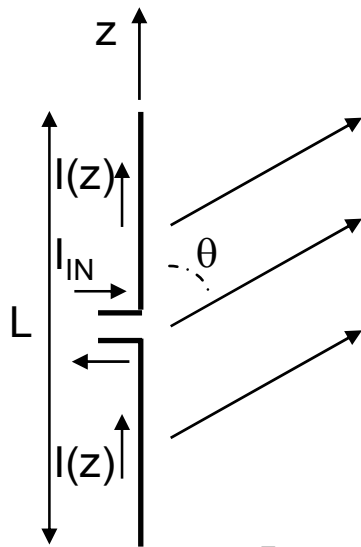
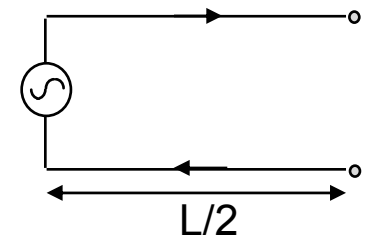
- La capacidad terminal permite corrientes más uniformes en la zona activa
- Se obtienen valores de R_{rad} más próximas al dipolo ideal.
- Se reduce la reactancia de entrada, facilitando la adaptación.

Dipolos Rectos

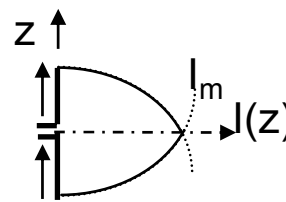
- Para dipolos como los de la figura de longitud L y alimentados en el centro la distribución aproximada de corriente es:

$$I(z) = I_m \sin \left[k \left(\frac{L}{2} - |z| \right) \right] \quad |z| < \frac{L}{2}$$

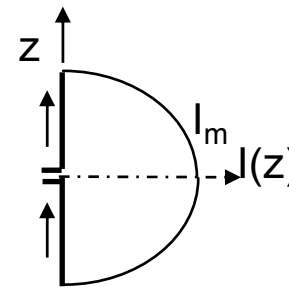
- La distribución de corriente se supone como la de la línea de transmisión en circuito abierto aún después de haberla rectificado.



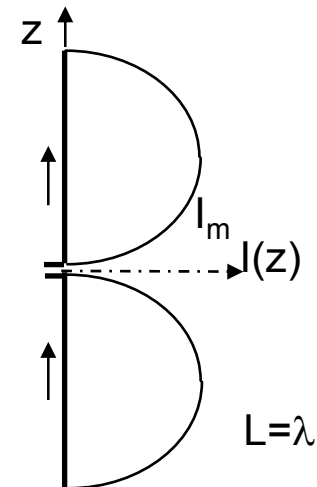
$$I_{IN} = I_m \sin \left[k \frac{L}{2} \right]$$



$L < \lambda/2$



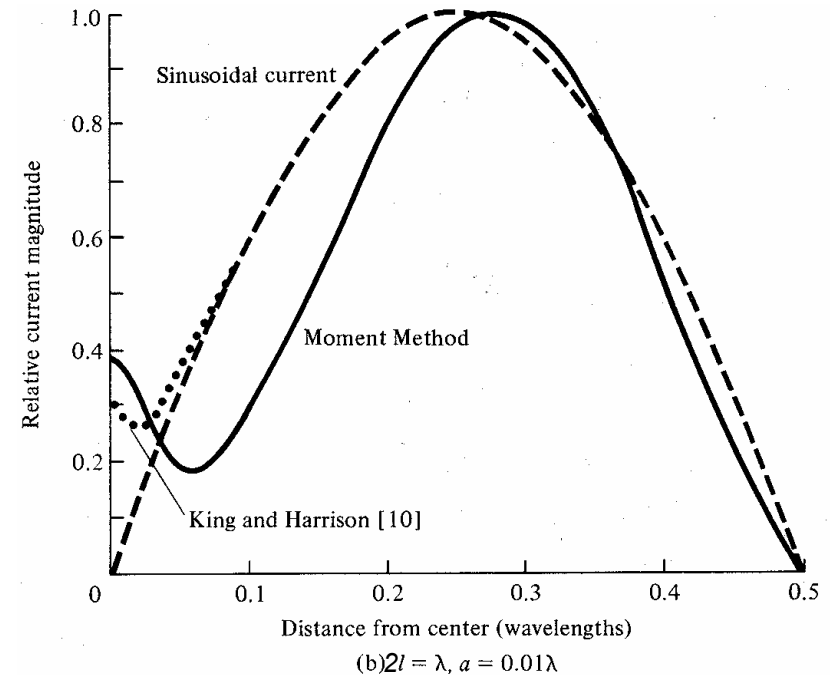
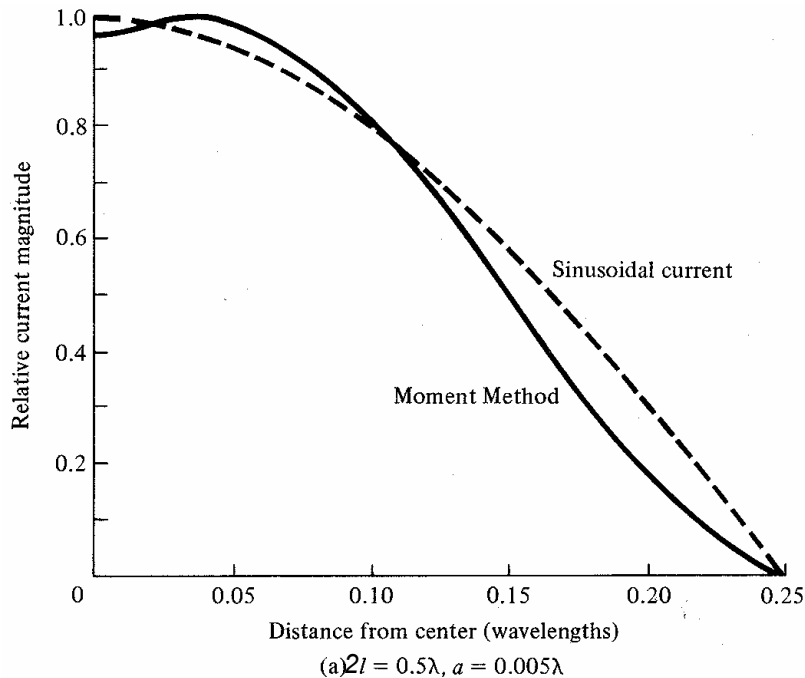
$L = \lambda/2$



$L = \lambda$

Dipolos Rectos

Comparación del modelo de corriente sinusoidal con la del Método de los Momentos

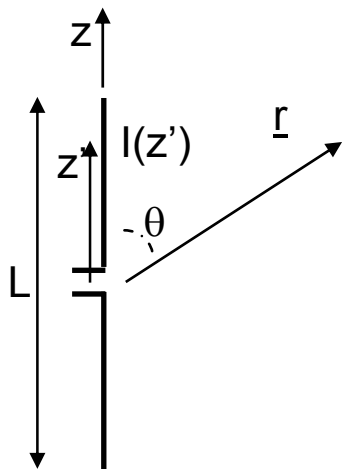


El modelo sinusoidal permite obtener expresiones cerradas para el diagrama de radiación suficientemente exactas y de fácil interpretación. Deja, sin embargo, bastante que desear a la hora de calcular la impedancia de entrada, sobre todo para dipolos antiresonantes ($L=2l$ del orden de λ)

Dipolos Rectos

Diagrama de Radiación:

Potencial:



$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_{C'} I(\vec{r}') e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}'} d\vec{l}' = \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_{-L/2}^{L/2} I_m \operatorname{sen}\left(k\left(\frac{L}{2} - |z|\right)\right) e^{jkz'\cos\theta} \hat{z} dz' = \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{2I_m}{k} \frac{\cos\left(\frac{kL}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{kL}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\theta} \left(\underbrace{\cos\theta\hat{r} - \operatorname{sen}\theta\hat{\theta}}_{\hat{z}}\right)\end{aligned}$$

$$\hat{r} \cdot \vec{r}' = (\operatorname{sen}\theta \cos\phi \hat{x} + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \hat{y} + \cos\theta \hat{z}) \cdot (z' \hat{z}) = z' \cos\theta$$

Campo:

$$\vec{E} = -j\omega(A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}) = j\eta \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} I_m \frac{\cos\left(\frac{kL}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{kL}{2}\right)}{\operatorname{sen}\theta} \hat{\theta}$$

$$E_\phi = 0 \quad \text{Polarización Lineal}$$

Dipolos Rectos

Diagrama de Radiación:
$$E_{\theta} = j\eta \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} I_m \frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos\theta\right) - \cos\left(\frac{kL}{2}\right)}{\sin\theta}$$

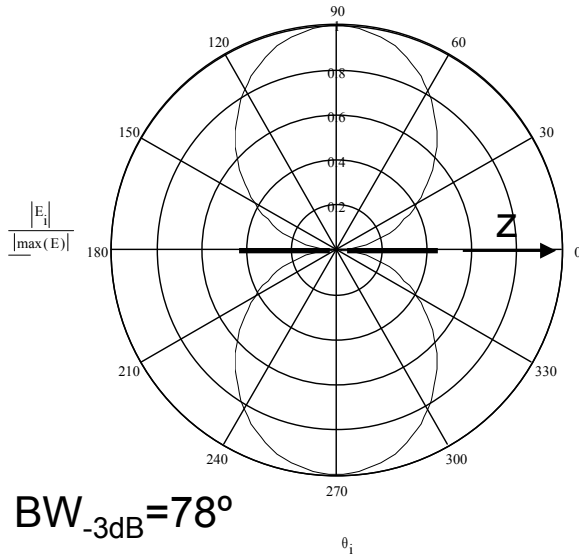
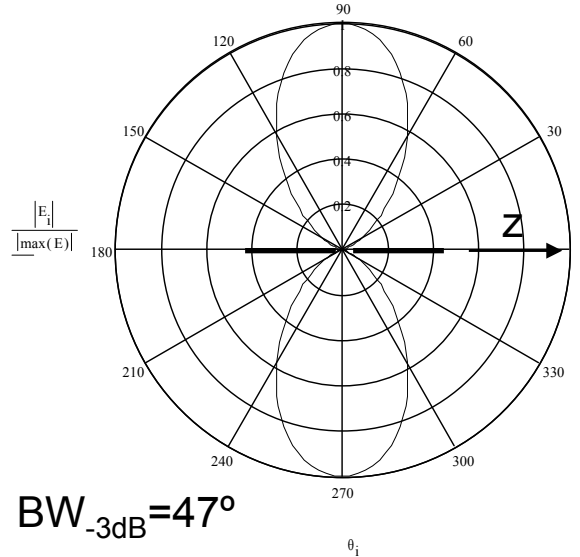


Diagrama Normalizado de campo:
$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\cos\theta}$$



$L = \lambda$

$$\frac{1 + \cos(\pi \cos\theta)}{2 \sin\theta}$$

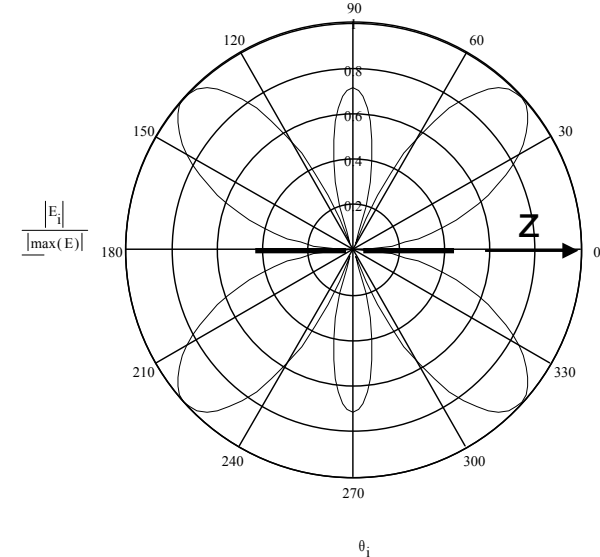
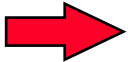


Diagrama Multilobulado carente de interés

Dipolos Rectos

Potencia Radiada

$$P_{\text{rad}} = \int_{4\pi} U(\theta, \phi) d\Omega = \frac{1}{2\eta} \int_{4\pi} |\vec{E}|^2 r^2 d\Omega =$$
$$= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\eta}{8\pi^2 r^2} I_m^2 \left(\frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos\theta\right) - \cos\left(\frac{kL}{2}\right)}{\sin\theta} \right)^2 r^2 \sin\theta d\theta d\phi =$$

$\tau = \cos\theta$ 

$$= \frac{\eta}{2\pi} I_m^2 \int_0^1 \frac{\left(\cos\left(\frac{kL}{2} \tau\right) - \cos\left(\frac{kL}{2}\right) \right)^2}{1 - \tau^2} d\tau$$

Resistencia de Radiación

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{2} I_{\text{in}}^2 R_{\text{rad}} \quad I_{\text{in}}^2 = I_m^2 \sin^2 \left[k \frac{L}{2} \right] \quad R_{\text{rad}} = \frac{2P_{\text{rad}}}{I_m^2 \sin^2 \left[k \frac{L}{2} \right]}$$

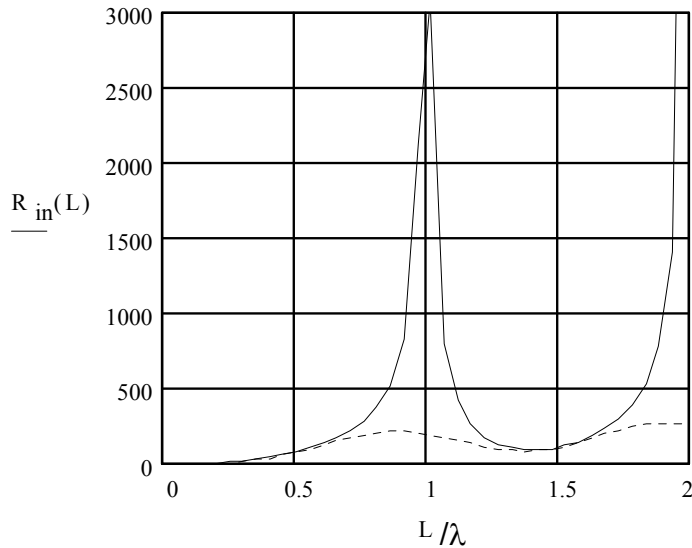
Dipolos Rectos

Resistencia de Entrada $\approx R_{\text{rad}}$:

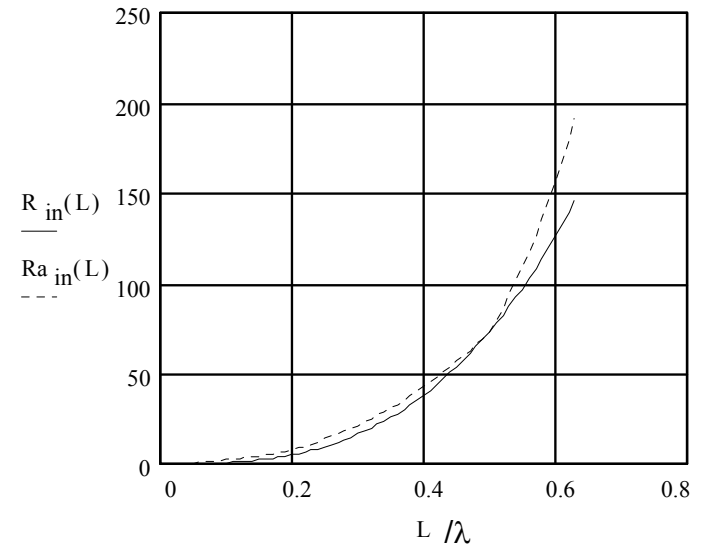
$$R_{\text{in}} = \frac{1}{\text{sen}^2\left[k\frac{L}{2}\right]} \frac{\eta}{\pi} \int_0^1 \frac{\left(\cos\left(\frac{kL}{2}\tau\right) - \cos\left(\frac{kL}{2}\right)\right)^2}{1-\tau^2} d\tau$$

Valor Aproximado $R_{\text{a in}}$:

$$R_{\text{a in}} \approx \begin{cases} 20\left(\pi\frac{L}{\lambda}\right)^2 & 0 < L < \frac{\lambda}{4} \\ 24.7\left(\pi\frac{L}{\lambda}\right)^{2.4} & \frac{\lambda}{4} < L < \frac{\lambda}{2} \\ 11.14\left(\pi\frac{L}{\lambda}\right)^{4.17} & \frac{\lambda}{2} < L < 0.637\lambda \end{cases}$$



$a \rightarrow 0$
 $L = \lambda/2$
 $R_{\text{rad}} = 73 \Omega$

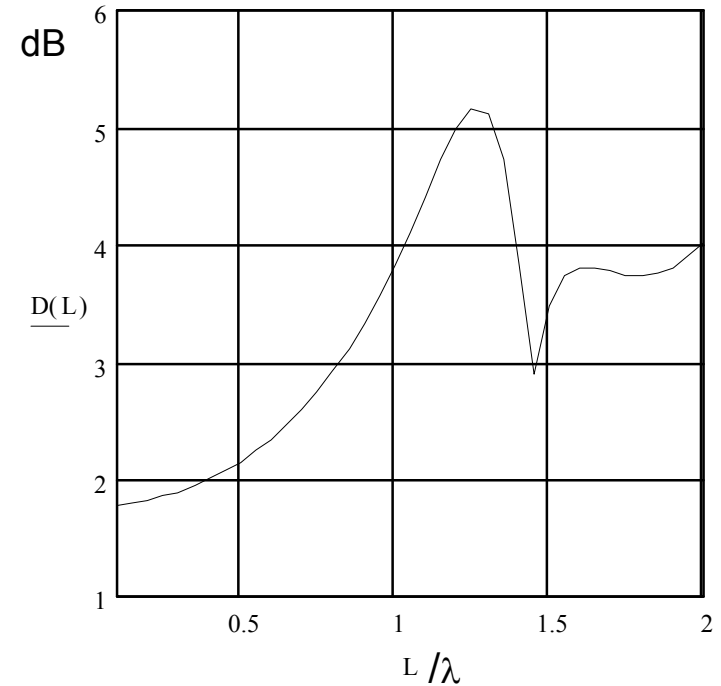


Dipolos Rectos

Directividad:

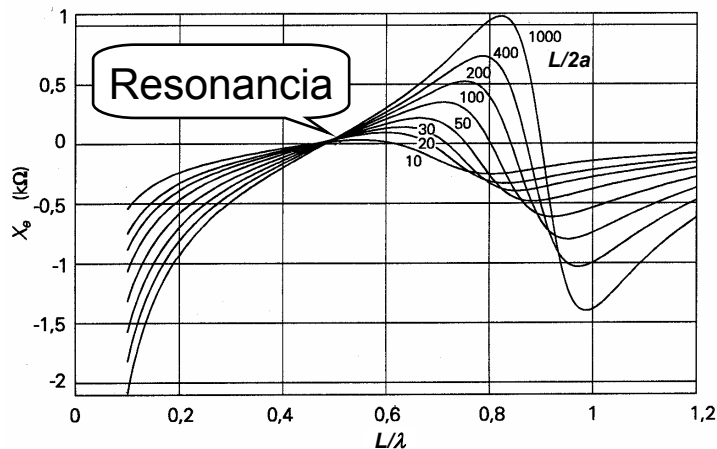
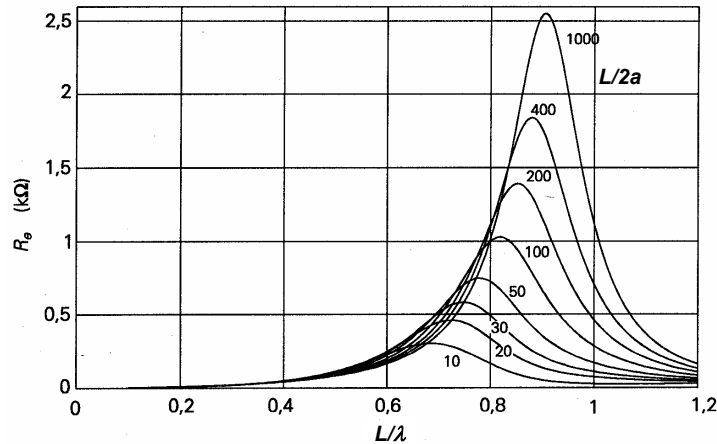
$$D_0 = 4\pi \frac{U(\theta, \phi)|_{\max}}{P_{\text{rad}}} =$$
$$= 4\pi \frac{\frac{r^2}{2\eta} |E_{\theta}|_{\max}^2}{\frac{\eta}{2\pi} I_m^2 \int_0^1 \frac{\left(\cos\left(\frac{kL}{2} \tau\right) - \cos\left(\frac{kL}{2}\right) \right)^2}{1 - \tau^2} d\tau}$$

$$D_0(L=\lambda/2)=1.64 \Rightarrow 2.16 \text{ dB}$$



Dipolos Rectos

Autoimpedancia ($Z_{IN}=R_e+jX_e$)



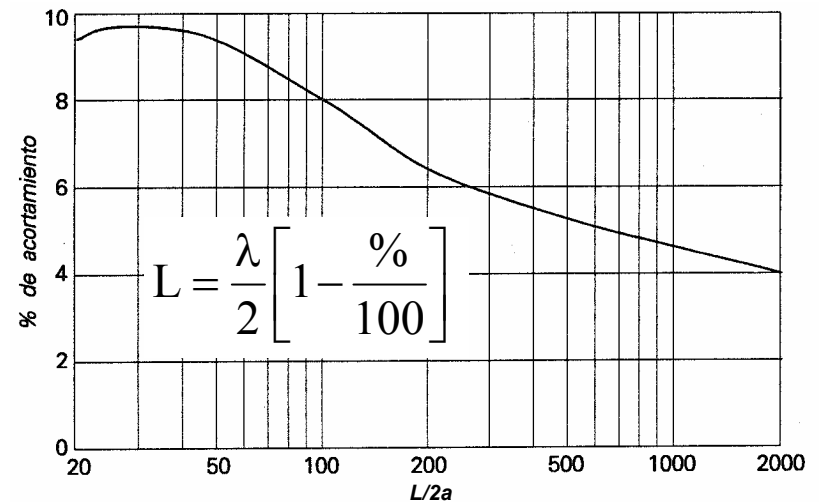
Fórmula de Tai (Validez $2,6 < kL < 3,4$)

$$Z_{IN} = \left(122,65 - 102 kL + 27,5(kL)^2 \right) - j \left(120 \cdot \left(\ln\left(\frac{L}{a}\right) - 1 \right) \cot\left(\frac{kL}{2}\right) - 162,5 + 70kL - 10(kL)^2 \right)$$

$Z_{IN}(\lambda/2) = 73 + j42,5 \Omega$ cuando $a \rightarrow 0$

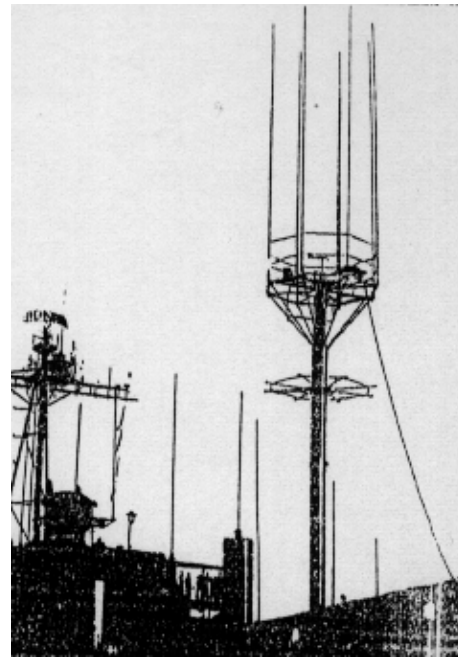
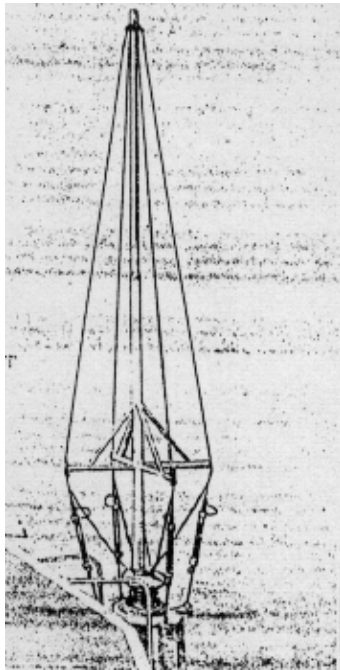
a = radio del dipolo

Condición de Resonancia



Dipolos Rectos

Cuando es necesario trabajar en bandas muy anchas se utilizan dipolos gruesos contruidos con varillas cortocircuitadas. En las fotos se pueden ver monopolos de onda corta utilizados sobre buques.



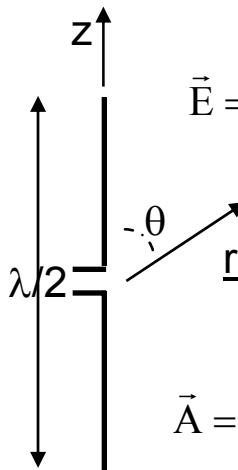
Rotaciones de Antenas

La Rotación conlleva un giro de los vectores de Campo radiado.

Las etapas necesarias son:

- Se parte de la expresión del potencial en componentes cartesianas.
- Los ángulos se definen en el nuevo sistema de coordenadas.

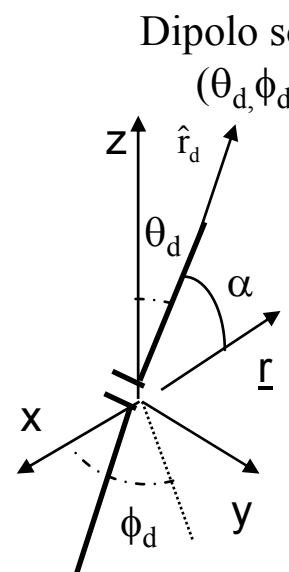
Como ejemplo:



$$\vec{E} = j\eta \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} I_m \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \hat{\theta}$$

$$\vec{A} = \hat{z} \frac{\mu}{4\pi} \frac{2I_m}{k} \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

Dipolo sobre (θ_d, ϕ_d)



$$\vec{A} = \hat{r}_d \frac{\mu}{4\pi} \frac{2I_m}{k} \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\alpha\right)}{\sin^2\alpha}$$

$$\vec{A} = \hat{r}_d A_{rd} = \hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z$$

$$\left. \begin{aligned} A_x &= A_{rd} \sin\theta_d \cos\phi_d \\ A_y &= A_{rd} \sin\theta_d \sin\phi_d \\ A_z &= A_{rd} \cos\theta_d \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A_\theta &= \vec{A} \cdot \hat{\theta} \\ A_\phi &= \vec{A} \cdot \hat{\phi} \end{aligned}$$

$$E_\theta = -j\omega A_\theta$$

$$E_\phi = -j\omega A_\phi$$

$$\cos\alpha = \hat{r}_d \cdot \hat{r} = \sin\theta_d \sin\theta \cos(\phi - \phi_d) + \cos\theta_d \cos\theta$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

Rotaciones de Dipolos $\lambda/2$

Dipolo según x ($\theta_d=\pi/2, \phi_d=0$)

$$\cos \alpha = \text{sen } \theta \cos \phi$$

$$\text{sen}^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2 \theta \cos^2 \phi$$

$$\vec{A} = \hat{x}A_x \quad \begin{cases} A_\theta = A_x(\hat{x} \cdot \hat{\theta}) = A_x \cos \theta \cos \phi \\ A_\phi = A_x(\hat{x} \cdot \hat{\phi}) = -A_x \text{sen } \phi \end{cases}$$

$$\vec{E} = E_\theta \hat{\theta} + E_\phi \hat{\phi} = -j\omega(A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi})$$

$$E_\theta = -j\eta \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} I_m \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \text{sen } \theta \cos \phi\right)}{1 - \text{sen}^2 \theta \cos^2 \phi} \cos \theta \cos \phi$$

$$E_\phi = j\eta \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} I_m \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \text{sen } \theta \cos \phi\right)}{1 - \text{sen}^2 \theta \cos^2 \phi} \text{sen } \phi$$

Dipolo según y ($\theta_d=\pi/2, \phi_d=\pi/2$)

$$\cos \alpha = \text{sen } \theta \text{sen } \phi$$

$$\text{sen}^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2 \theta \text{sen}^2 \phi$$

$$\vec{A} = \hat{y}A_y \quad \begin{cases} A_\theta = A_y(\hat{y} \cdot \hat{\theta}) = A_y \cos \theta \text{sen } \phi \\ A_\phi = A_y(\hat{y} \cdot \hat{\phi}) = A_y \cos \phi \end{cases}$$

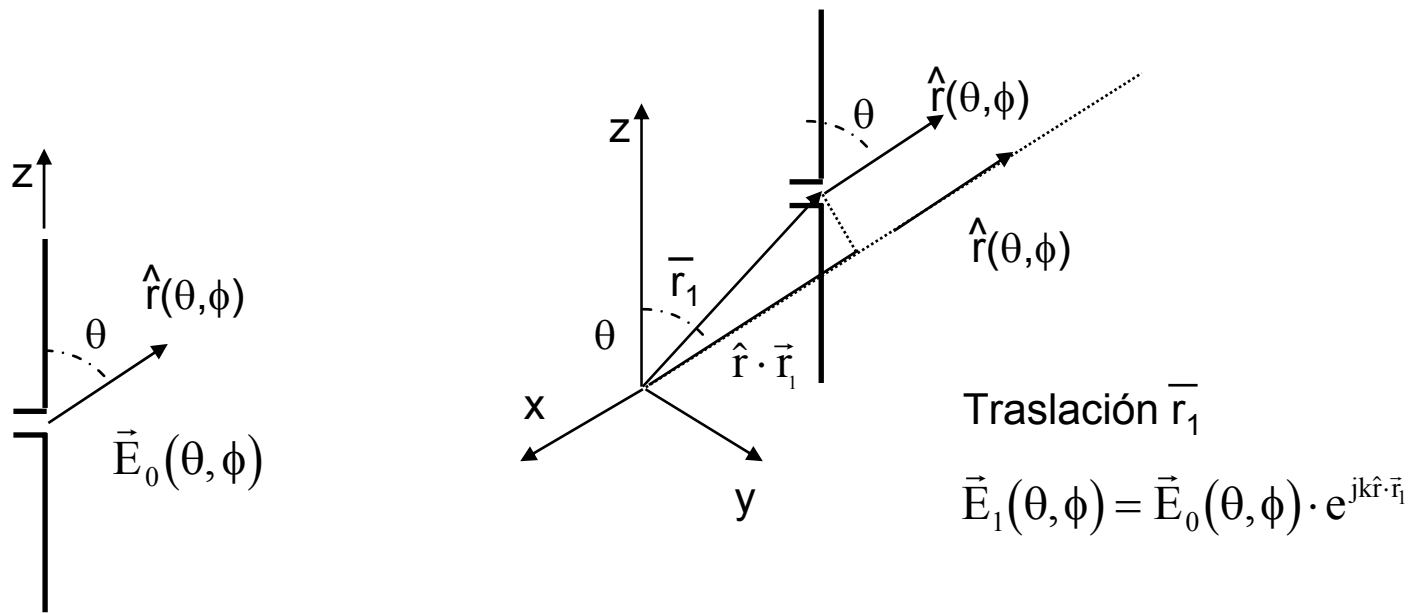
$$\vec{E} = E_\theta \hat{\theta} + E_\phi \hat{\phi} = -j\omega(A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi})$$

$$E_\theta = -j\eta \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} I_m \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \text{sen } \theta \text{sen } \phi\right)}{1 - \text{sen}^2 \theta \text{sen}^2 \phi} \cos \theta \text{sen } \phi$$

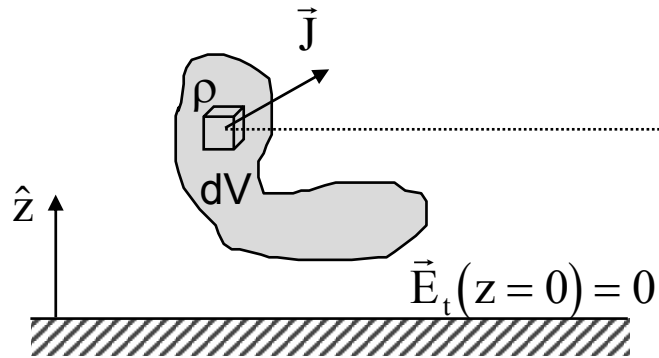
$$E_\phi = -j\eta \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} I_m \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \text{sen } \theta \text{sen } \phi\right)}{1 - \text{sen}^2 \theta \text{sen}^2 \phi} \cos \phi$$

Traslaciones de Antenas

La expresión de los campos de una antena trasladada se relacionan con los que crea la misma antena centrada en el origen de coordenadas a través del fasor que tiene en cuenta el adelanto o retraso de fase de la onda radiada según la dirección considerada.



Teorema de Imágenes en Electrodinámica

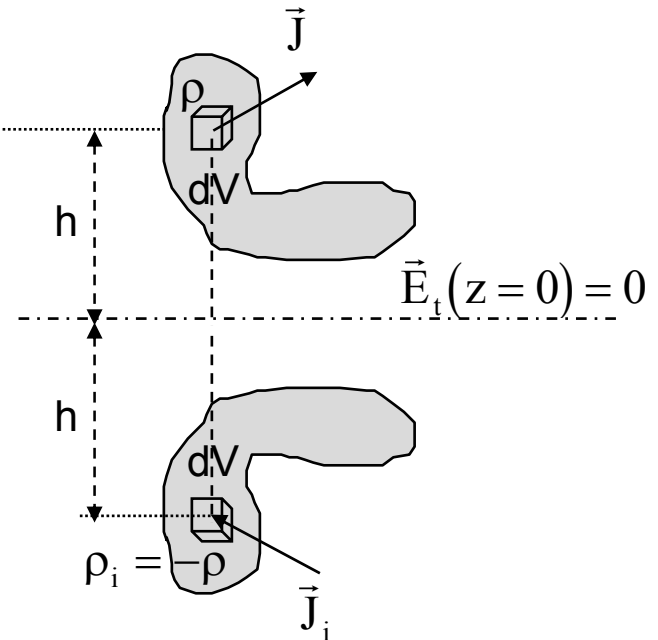


Conductor Eléctrico
Perfecto, Plano e Indefinido

Cargas y Corrientes Imágenes

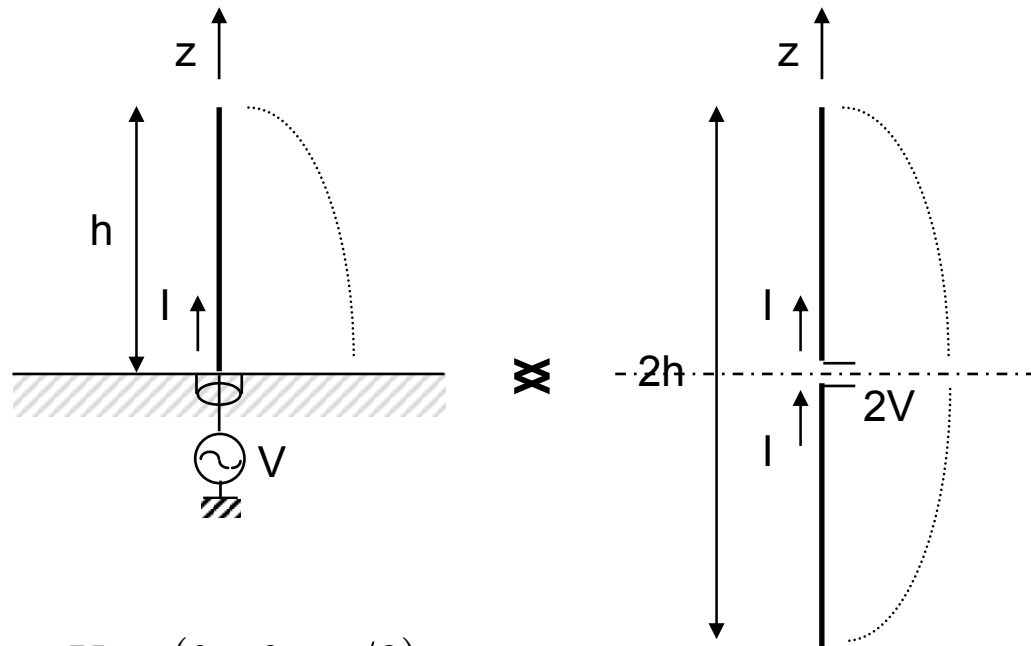
$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \\ \rho_i = -\rho \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \vec{J} = J_x \hat{x} + J_y \hat{y} + J_z \hat{z} \\ \vec{J}_i = -J_x \hat{x} - J_y \hat{y} + J_z \hat{z} \end{array} \right.$$

✕



Resultados
válidos sólo para $z \geq 0$

Monopolo Vertical sobre Plano de Conductor



$$D_m = 4\pi \frac{U_m}{P_m} \quad \begin{cases} U_m = U_d \quad (0 \leq \theta \leq \pi/2) \\ P_m = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} U_m(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \frac{1}{2} P_d \end{cases}$$

$$D_d = 4\pi \frac{U_d}{P_d}$$

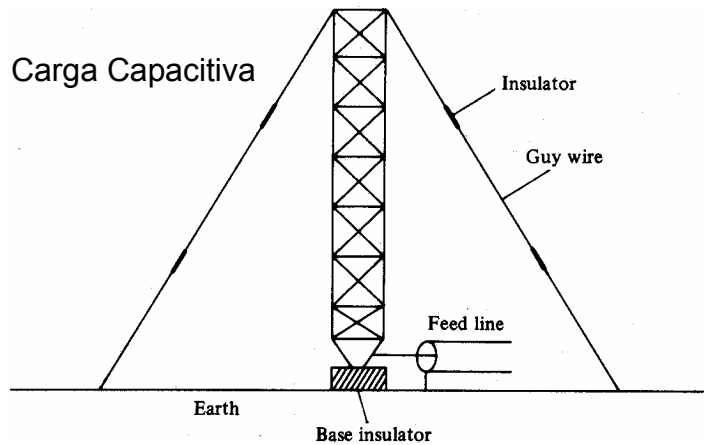
$$Z_{INdipolo} = \frac{2V}{I} = 2Z_{INMonopolo}$$

$$D_{monopolo} = 2D_{dipolo}$$

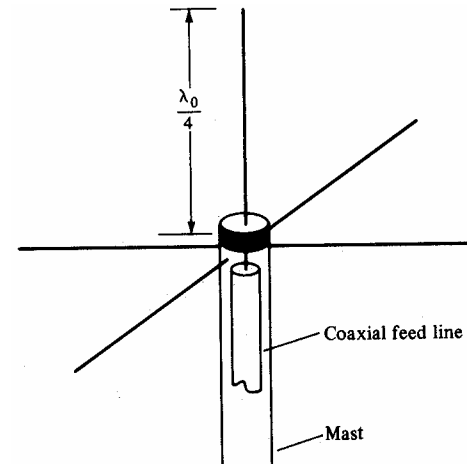
$$Z_{INmonopolo} = \frac{1}{2} Z_{INdipolo}$$

Ejemplos de Monopolos Verticales

Monopolos de radiodifusión de Onda Media sobre tierra



Monopolo sobre plano conductor simulado con varillas



Varillas radiales para reducir pérdidas ohmicas

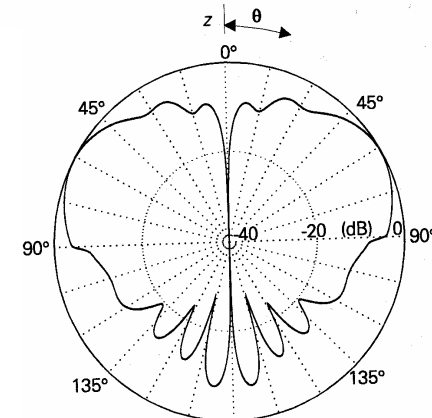
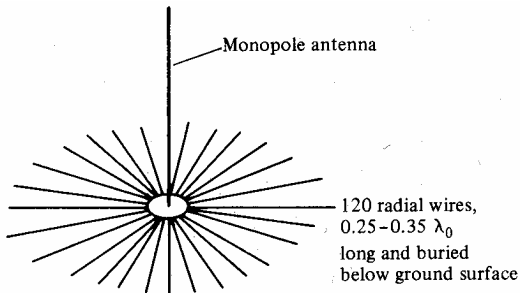
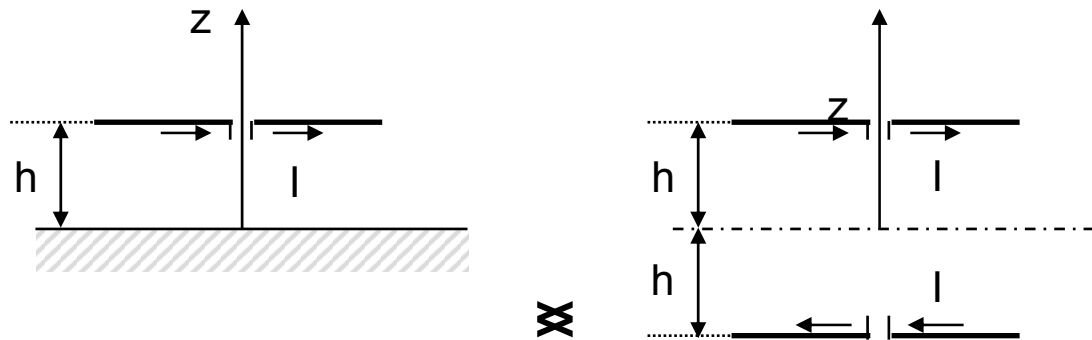


Diagrama Típico

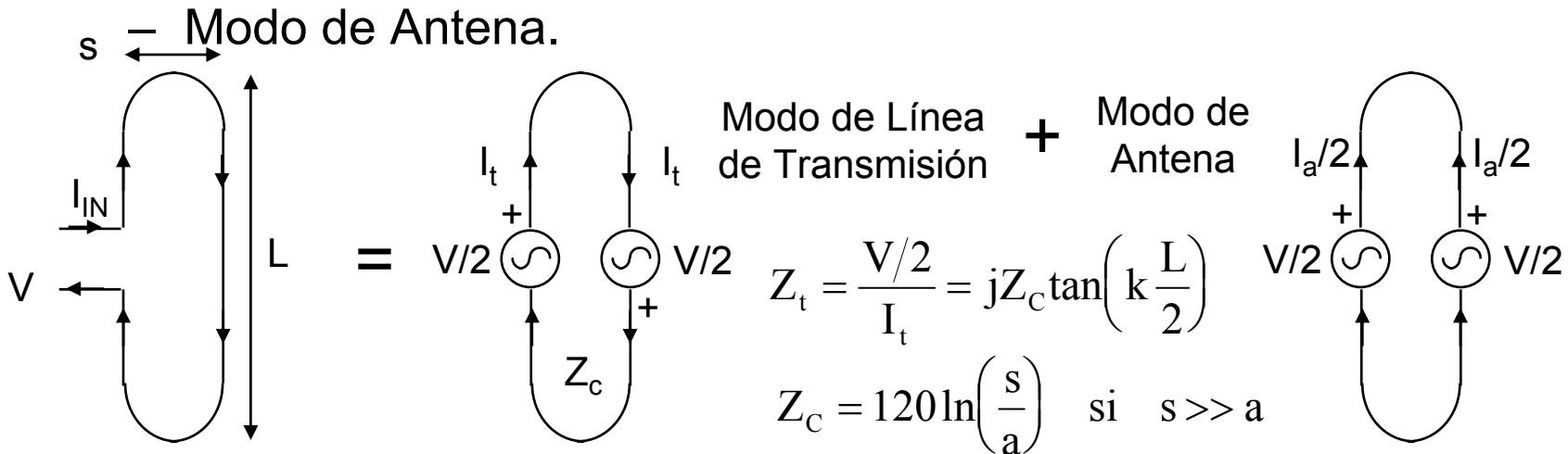
Dipolos paralelos a un plano conductor



- Si $h \ll \lambda$ el campo radiado es pequeño (R_{in} muy pequeña).
- Si $h = \lambda/4$ el campo se refuerza en dirección del eje z.
- Con planos conductores finitos la aproximación no es mala si las dimensiones del plano son superiores a λ (dipolos $\lambda/2$). Afecta poco al diagrama frontal, pero aparece algo de radiación posterior a causa de la difracción en el borde del plano. Afecta algo más a Z_{in} .

Dipolo Doblado

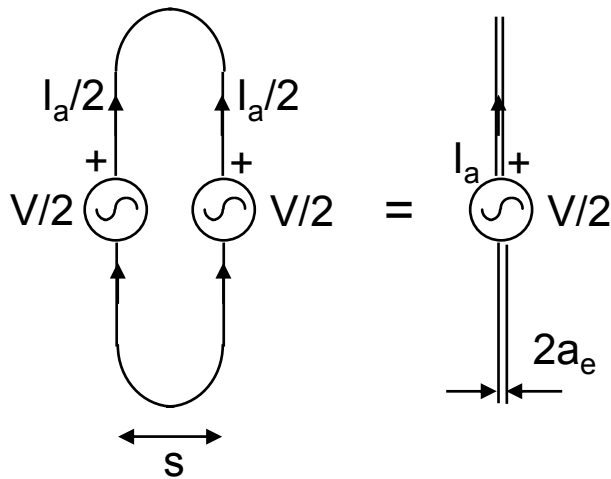
- Construido con dos dipolos paralelos conectados por sus extremos formando una espira alargada y alimentado en el centro de uno de los dipolos.
- Se analiza superponiendo dos modos de corriente:
 - Modo de Línea de Transmisión (no produce campo radiado $d \ll \lambda$)



Dipolo Doblado

Impedancia de Entrada

- Para el modo antena la configuración se comporta como un dipolo normal de radio equivalente a_e



$$a_e = \sqrt{s \cdot a} \quad a = \text{radio de la varilla del dipolo plegado}$$

$$Z_a = Z_{\text{dipolo}(L, a_e)} = \frac{V/2}{I_a}$$

$$\left. \begin{aligned} I_t &= \frac{V/2}{Z_t} \\ I_a &= \frac{V/2}{Z_a} \end{aligned} \right\}$$

$$I_{\text{IN}} = I_t + \frac{I_a}{2} \quad \rightarrow \quad Z_{\text{in}} = \frac{V}{I} = \frac{4Z_t Z_a}{Z_t + 2Z_a}$$

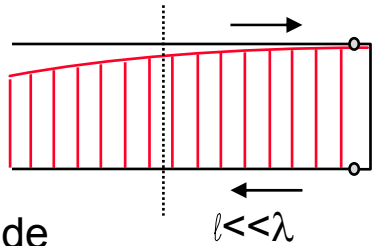
Cuando el dipolo es resonante, $L \approx \lambda/2$ \rightarrow $Z_{\text{in}} = 4Z_a \approx 4 \cdot 73 = 292 \Omega$

Ventajas: Aumenta la impedancia de entrada y la anchura de banda, puesto que cuando Z_t se hace inductiva ($L/2 < \lambda/4$) Z_a es capacitiva y viceversa.

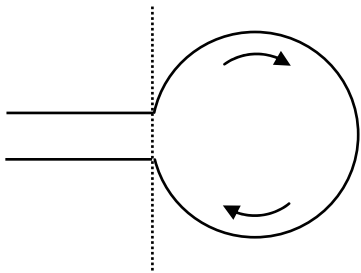
Antenas de Cuadro

Distribuciones de Corriente Aproximadas

Espira electricamente pequeña:

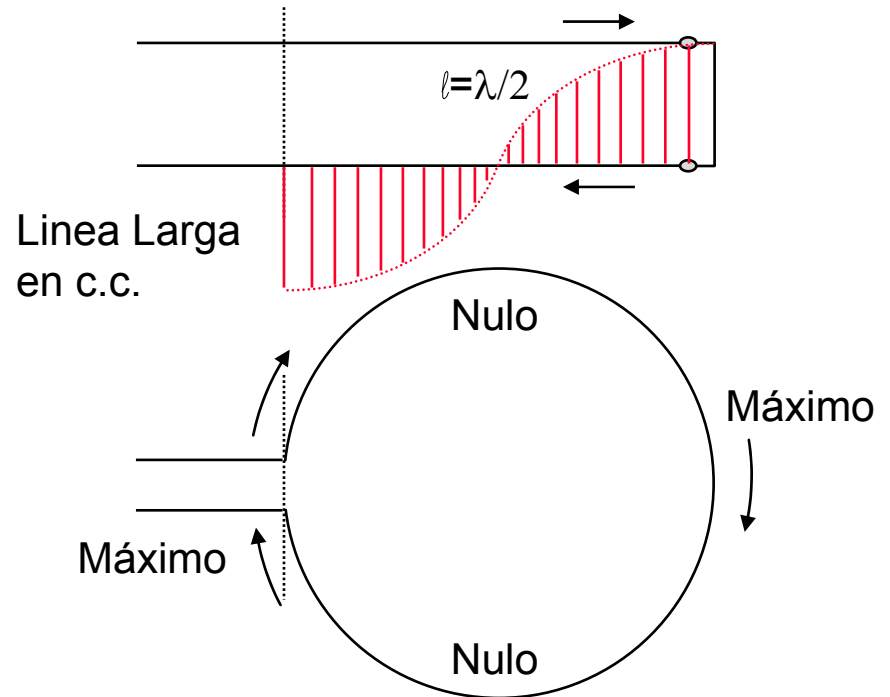


Aproximación de
línea corta en c.c.



- Corriente uniforme
- Diagrama útil
- Rendimiento bajo

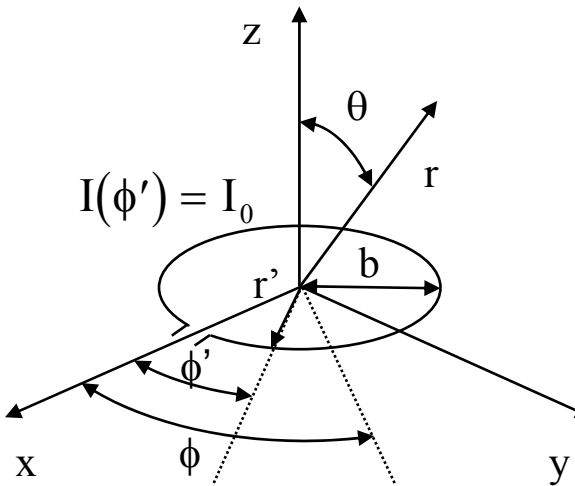
Espira electricamente grande:



Línea Larga
en c.c.

- Corriente no uniforme
- Diagrama multilobulado poco útil
- Rendimiento alto

Antenas de cuadro con corriente uniforme



Potencial:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_{C'} I(\vec{r}') e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}'} d\vec{l}' = \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_{-0}^{2\pi} I_0 \underbrace{(-\hat{x} \text{sen } \phi' + \hat{y} \text{ cos } \phi')}_{\hat{\phi}'} e^{jkb \text{sen } \theta \text{ cos}(\phi - \phi')} b d\phi'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{r} \cdot \vec{r}' &= (\text{sen } \theta \text{ cos } \phi \hat{x} + \text{sen } \theta \text{ sen } \phi \hat{y} + \text{cos } \theta \hat{z}) \cdot (b \text{ cos } \phi' \hat{x} + b \text{ sen } \phi' \hat{y}) = \\ &= b \text{ cos } \theta \text{ cos}(\phi - \phi')\end{aligned}$$

$$A_\theta = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} I_0 b \text{ cos } \theta \left[\underbrace{\text{cos } \phi \int_{-0}^{2\pi} -\text{sen } \phi' e^{jkb \text{sen } \theta \text{ cos}(\phi - \phi')} d\phi'}_{I_x} + \underbrace{\text{sen } \phi \int_{-0}^{2\pi} \text{cos } \phi' e^{jkb \text{sen } \theta \text{ cos}(\phi - \phi')} d\phi'}_{I_y} \right]$$

$$A_\phi = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} I_0 b \left[\underbrace{-\text{sen } \phi \int_{-0}^{2\pi} -\text{sen } \phi' e^{jkb \text{sen } \theta \text{ cos}(\phi - \phi')} d\phi'}_{I_x} + \underbrace{\text{cos } \phi \int_{-0}^{2\pi} \text{cos } \phi' e^{jkb \text{sen } \theta \text{ cos}(\phi - \phi')} d\phi'}_{I_y} \right]$$

$$A_\theta = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} I_0 b \text{ cos } \theta \int_{-0}^{2\pi} \text{sen}(\phi - \phi') e^{jkb \text{sen } \theta \text{ cos}(\phi - \phi')} d\phi'$$



$$A_\phi = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} I_0 b \int_{-0}^{2\pi} \text{cos}(\phi - \phi') e^{jkb \text{sen } \theta \text{ cos}(\phi - \phi')} d\phi'$$

Análisis de las Antenas de Cuadro

$$\int_{m-2\pi}^m \text{sen } x e^{jB \cos x} = 0$$

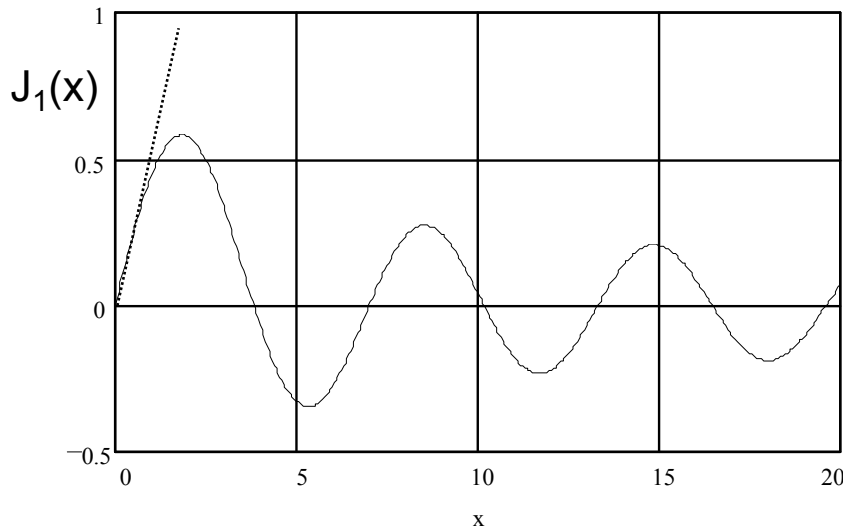
$$\int_{m-2\pi}^m \cos x e^{jB \cos x} = j2\pi J_1(B)$$



$$A_\theta = 0$$

$$A_\phi = j \frac{\mu}{2} \frac{e^{-jkr}}{r} I_0 b J_1(kb \text{ sen } \theta)$$

Función de Bessel



x_{\max}	1.841	5.333	8.536	11.702
$J_1(x_{\max})$	0.582	-0.346	0.273	-0.233
Ceros	3.833	7.016	10.175	13.324

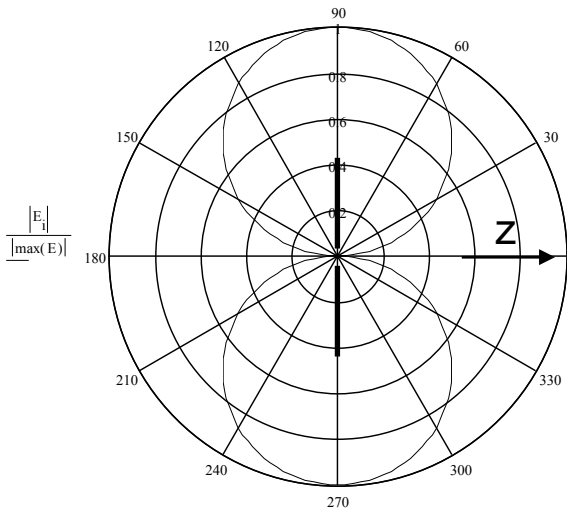
Pendiente en el origen: 0,5

Análisis de Antenas de Cuadro

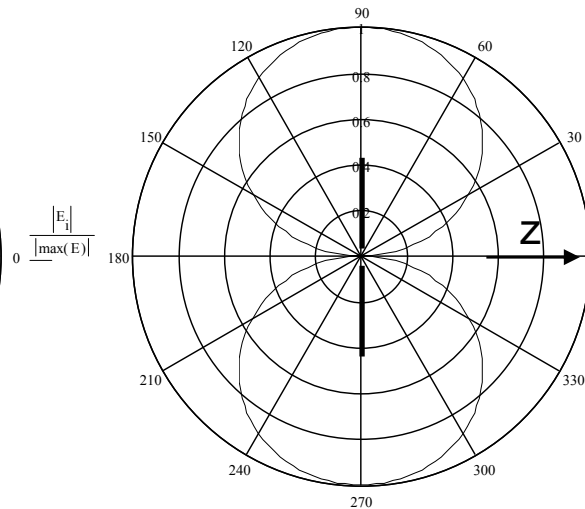
Campo:
$$\vec{E} = -j\omega(A_{\theta}\hat{\theta} + A_{\phi}\hat{\phi}) = \pi \frac{\eta}{\lambda} \frac{e^{-jkr}}{r} I_0 b J_1(kb \text{ sen } \theta)\hat{\phi}$$

$E_{\theta} = 0$ Polarización Lineal

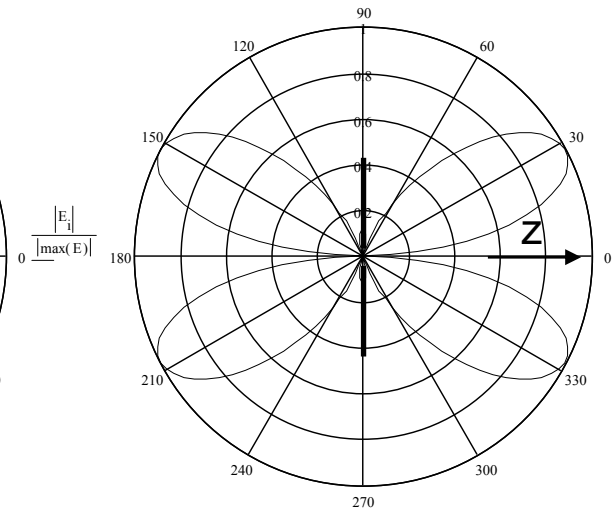
Diagrama Multilobulado
carente de interés



$2\pi b = 0,1\lambda$



$2\pi b = \lambda$



$2\pi b = 4\lambda$

Aproximación de cuadro pequeño

$kb \ll 1$

$J_1(kb \text{ sen } \theta) \approx \frac{1}{2} kb \text{ sen } \theta$

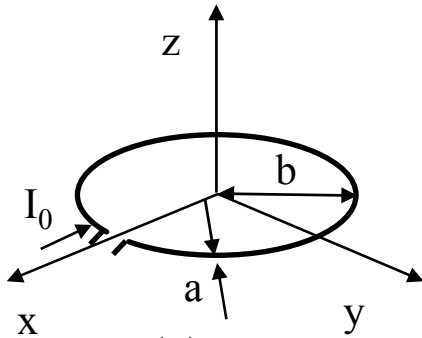
!Expresión válida para cualquier forma de espira de area A!

$$\vec{E} = \frac{\eta\pi}{\lambda^2} \frac{e^{-jkr}}{r} I_0 A \text{ sen } \theta \hat{\phi}$$

$A = \pi b^2$

Cuadro Electricamente Pequeño

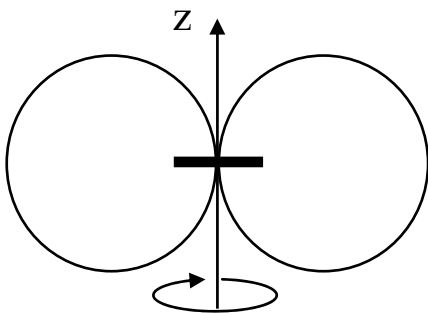
Cuadros Simples



$$I(z) = I_0$$

$$a \ll \lambda$$

$$b \ll \lambda$$



$$\vec{E} = \frac{\eta\pi}{\lambda^2} \frac{e^{-jkr}}{r} I_0 A \sin\theta \hat{\phi} \quad A = \pi b^2$$

$$\left| \frac{E(\theta)}{E_{MAX}} \right| = \sin\theta$$

$$P_{rad} = \int_{4\pi} U(\theta, \phi) d\Omega = \frac{Z_0}{12\pi} |I_0|^2 (k^2 A)^2$$

$$D_0 = 3/2$$

Resistencia de Radiación

$$R_{rad} = \frac{2P_R}{|I_0|^2} = 20(k^2 A)^2 = 31200 \left(\frac{A}{\lambda^2} \right)^2$$

Mucho menor que la del dipolo de longitud $2\pi b$

Resistencia de Pérdidas

$$R_{perd} = \frac{2P_{perd}}{|I_0|^2} = \frac{2}{|I_0|^2} \int_1^2 \frac{1}{2} \frac{R_s}{2\pi a} |I(l)|^2 dl = \frac{2\pi b}{2\pi a} R_s = \frac{b}{a} R_s$$

$$R_s = \frac{E_z(\rho = a)}{H_z(\rho = a)} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

$$\text{Rendimiento} = \frac{R_{rad}}{R_{perds} + R_{rad}}$$

Valores típicos del orden de 10^{-4} restringen su uso a aplicaciones de recepción en baja frecuencia

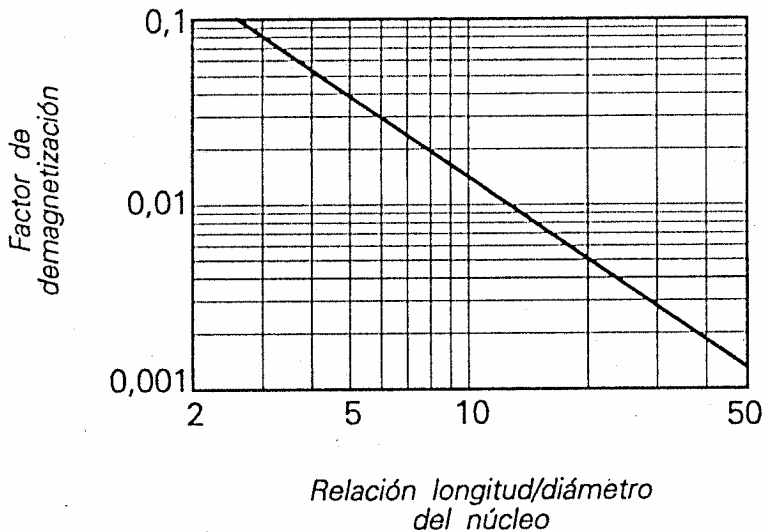
Cuadros Pequeños Reales

Se obtiene una mayor R_{in} arrollando n espiras juntas. Para corriente uniforme ($n2\pi b \ll \lambda$) vale:

$$|E| \propto nI_0 \quad P_{rad} \propto n^2 I_0^2 \quad R_{rad} = 31200 n^2 \left(\frac{A}{\lambda^2} \right)^2$$

Se aumenta también la R_{in} arrollando las espiras sobre un núcleo de ferrita ya que el valor de k aumenta ($k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \mu_{eff}}$). Utilizando la Ley de Faraday, la tensión en bornas de la antena vale:

$$V = - \frac{d}{dt} \oint_S n \vec{B} \cdot d\vec{S} = -j\omega \mu_0 \mu_{eff} n H A \quad R_{rad} = 31200 \left(n \mu_{eff} \frac{A}{\lambda^2} \right)^2$$



La permeabilidad efectiva del material depende de la permeabilidad intrínseca y de su geometría. En la figura se relaciona el factor D de demagnetización con la forma del núcleo.

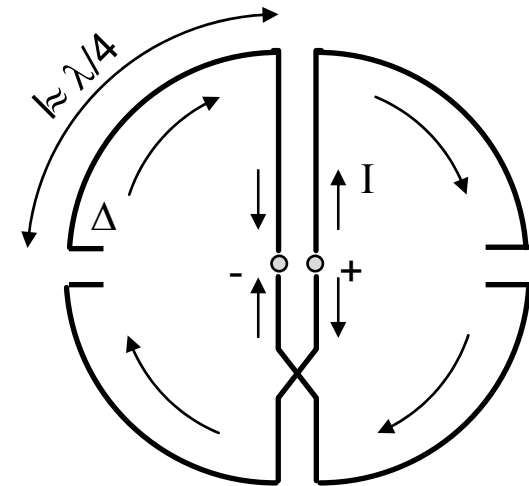
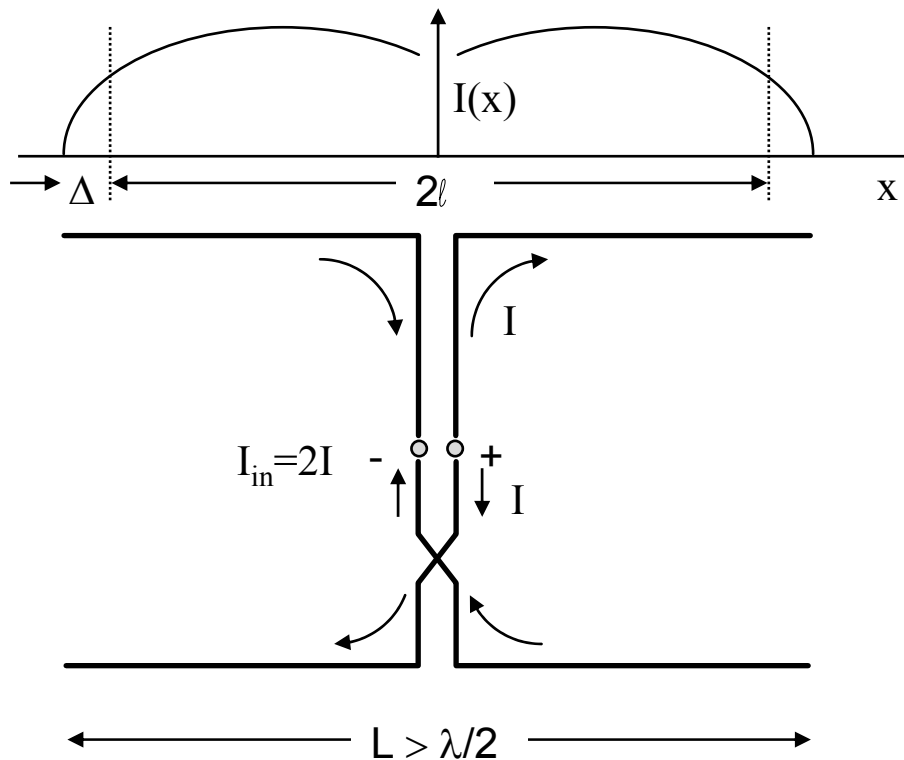
$$\mu_{eff} = \frac{\mu_{int}}{1 + D(\mu_{int} - 1)} \quad \mu_{eff} \approx 10^2 \quad \text{a} \quad 10^3$$

La impedancia de entrada de estos cuadros es siempre inductiva: $Z_{in} = R_{in} + j\omega L$

$$L = \mu_{eff} \mu_0 n b \left(\ln \left(\frac{16b}{2a} \right) - 1.75 \right)$$

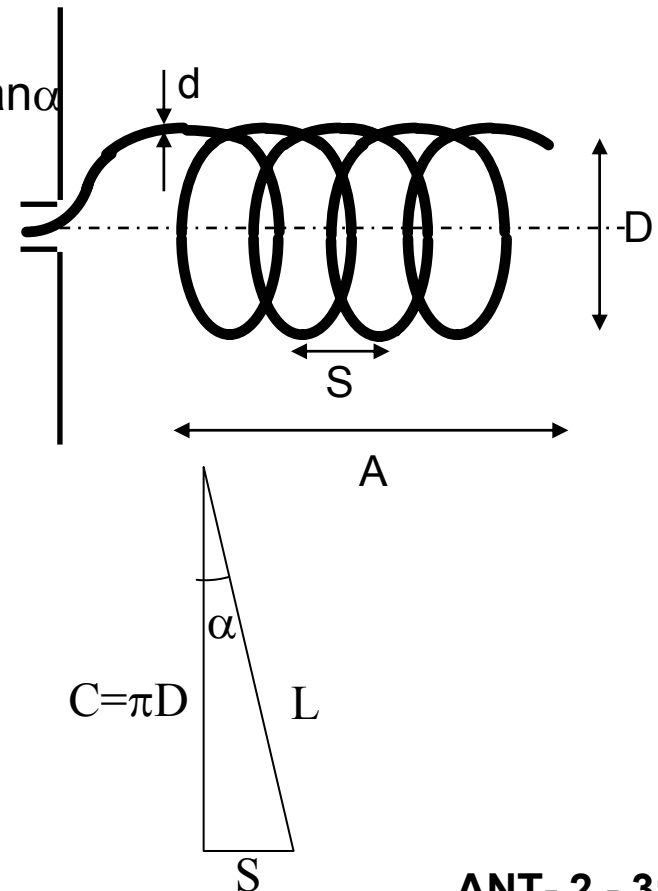
Cuadro de Alford

Es un cuadro especial de longitud de circunferencia del orden de λ recorrido por una corriente prácticamente constante. Su génesis y distribución de corriente son los de la figura. El rendimiento es próximo a 1, lo que permite utilizarla en transmisión ($R_{in} \approx 50 \Omega$).



Hélices

- La geometría de la hélice se caracteriza por:
 - D = Diámetro de la hélice (diámetro del cilindro sobre el que se arrolla)
 - C = Perímetro del cilindro= πD
 - S = Paso (Espaciado entre vueltas)= $\pi D \tan \alpha$
 - α = Angulo de Inclinación= $\text{atan}(S/C)$
 - L = Longitud de una vuelta
 - N = Número de vueltas
 - A = Longitud Axial= NS
 - d = Diámetro del conductor de la hélice
- Opera en dos modos de radiación:
 - Modo Normal
 - Modo Axial



Hélices

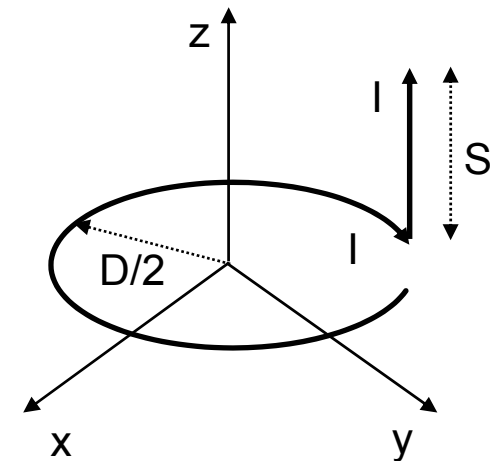
Modo Normal de Radiación

- En este modo la hélice es eléctricamente pequeña ($N\lambda \ll \lambda$) y se caracteriza por:
 - La corriente se puede considerar aproximadamente constante en toda la hélice.
 - El campo radiado por la hélice es la suma del de:
 - » N cuadros pequeños situados en el plano XY.
 - » N dipolos cortos según z.

$$\vec{E} = N \left(j\omega\mu IS \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sin\theta \hat{\theta} + \eta k^2 I \frac{D^2}{4} \frac{e^{-jkr}}{4r} \sin\theta \hat{\phi} \right)$$

- El diagrama ($\sin\theta$) es así independiente del número de vueltas (N).
- Directividad=1,5
- La polarización es elíptica de relación axial:

$$AR = \frac{|E_{\theta}|}{|E_{\phi}|} = \frac{2S\lambda}{\pi^2 D^2} \quad \text{Si } 2S\lambda = \pi^2 D^2 \Rightarrow \text{Polarización Circular}$$



Modelo de Radiación
de 1 vuelta

Hélices

Modo Axial de Radiación

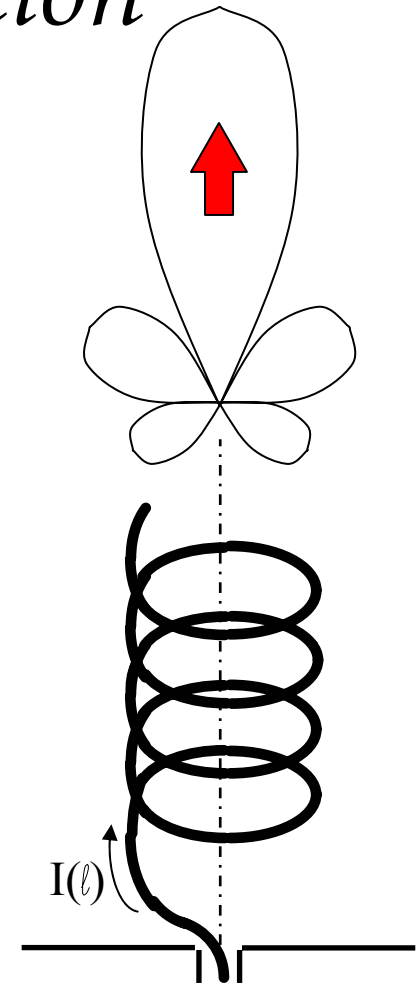
- Este modo de radiación se da para hélices eléctricamente grandes, de dimensiones $3/4 < C/\lambda < 4/3$ y $\alpha \approx 12^\circ - 15^\circ$, y se caracteriza por:

- La corriente es una onda progresiva sobre la hélice: $I(\ell) = I_0 \exp(-jk\ell)$
- Funciona en banda ancha: $f_{\text{sup}}/f_{\text{inf}} = 1,78$
- La impedancia de entrada es aproximadamente real, de valor:
$$R_{\text{in}} \approx 140 \frac{C}{\lambda} \approx 140 \quad \Omega$$

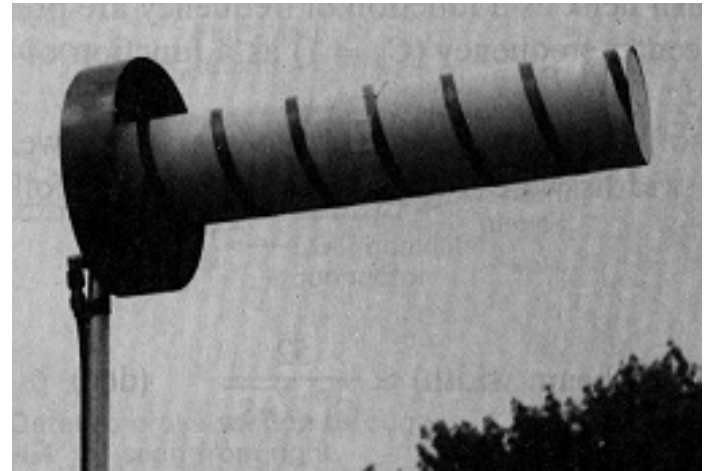
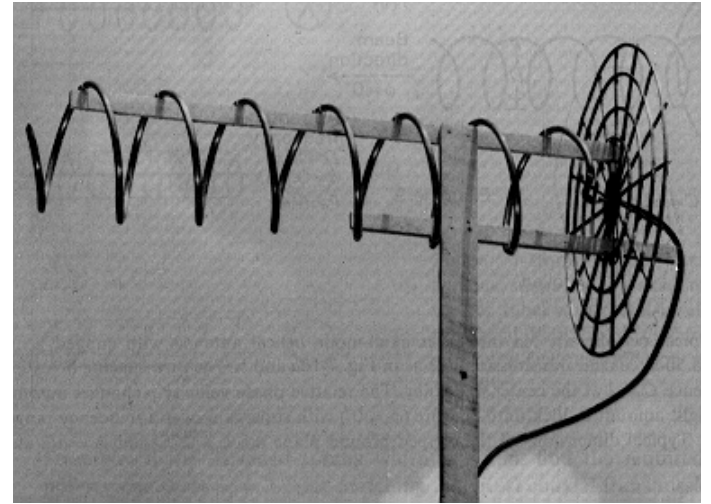
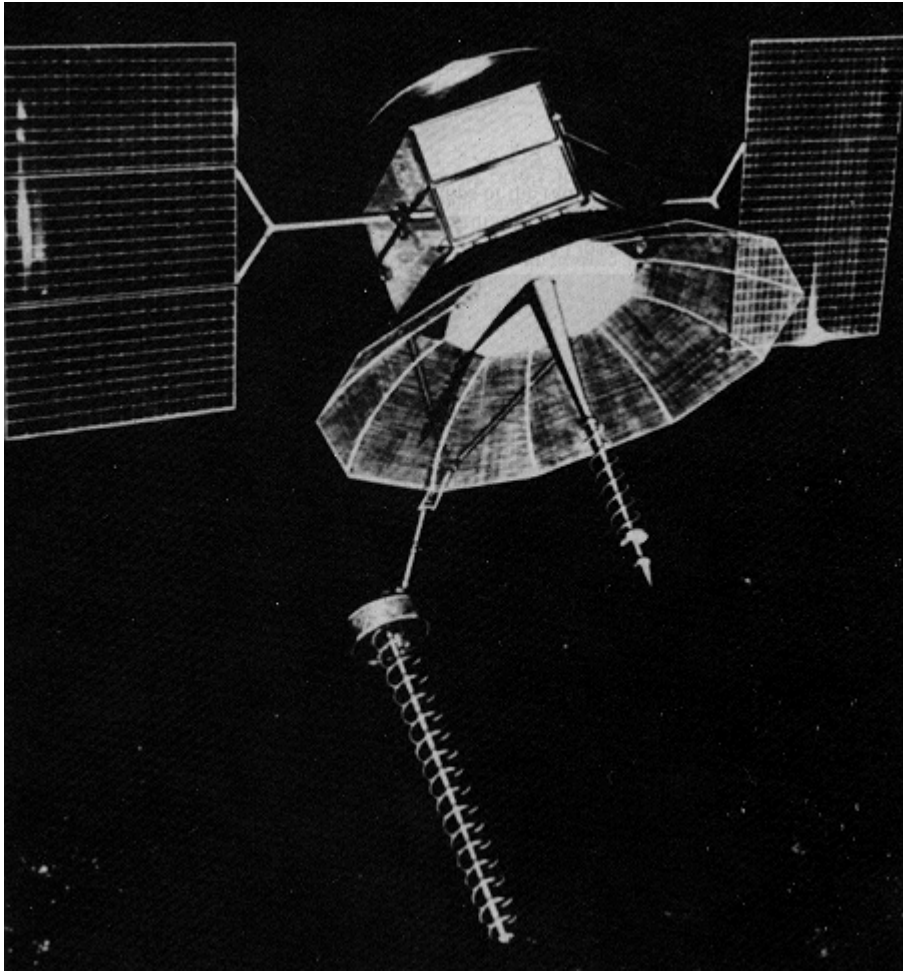
- La polarización nominal es circular del mismo sentido de giro que el arrollamiento.
- Diagrama directivo tipo array endfire de Hansen-Woodyard, con un nivel de lóbulo secundario de -9 dB.

- Directividad:
$$D \approx 15 \left(\frac{C}{\lambda} \right)^2 \frac{NS}{\lambda} \approx 15 \frac{A}{\lambda}$$

- Anchura de Haz:
$$BW_{-3\text{dB}} \approx \frac{52}{C/\lambda \sqrt{A/\lambda}} \approx \frac{52}{\sqrt{A/\lambda}} \quad \text{grados}$$

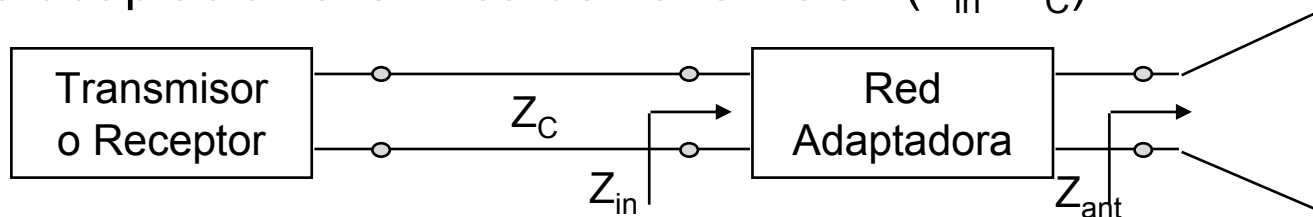


Ejemplos de Hélices Reales

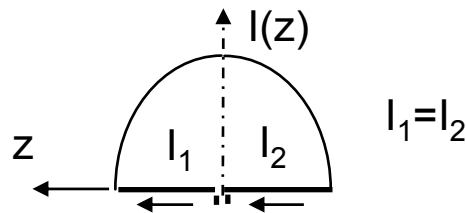


Alimentación de Dipolos

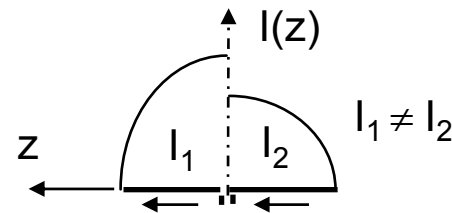
- El objetivo es conseguir que la potencia disponible en el transmisor se entregue íntegra a la antena de forma equilibrada sobre sus dos brazos.
- Hay dos consideraciones:
 - La adaptación a la línea de transmisión ($Z_{in} = Z_C$)



- La distribución de la corriente de excitación sobre la antena



Equilibrada

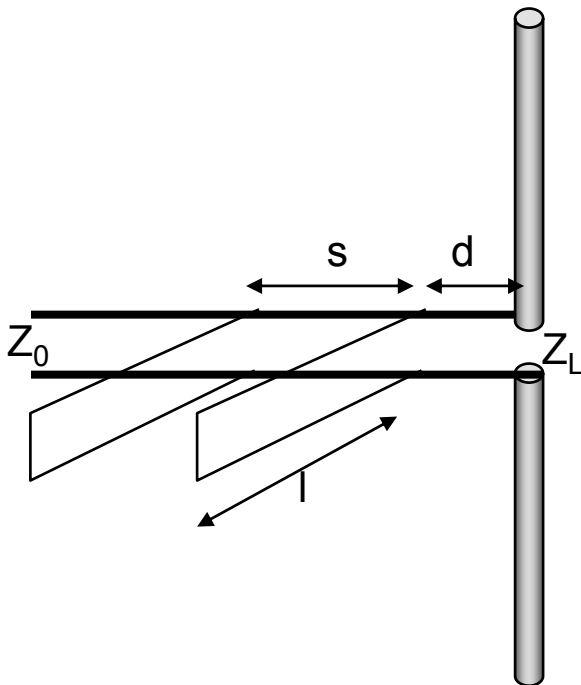


No Equilibrada

Técnicas de Adaptación

■ Stubs.

- Hasta 3 stubs



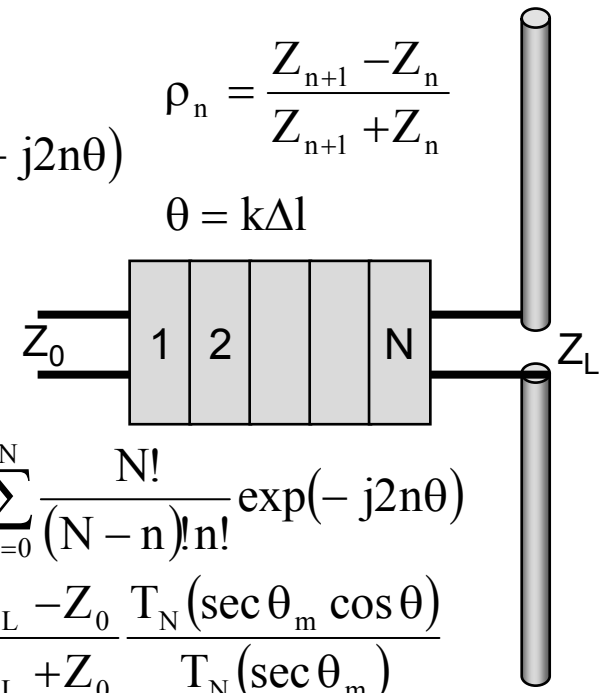
■ Transformadores de $\lambda/4$

- Simples: $Z_{\text{stub}} = \sqrt{Z_{\text{in}} Z_{\text{linea}}}$
- Múltiples : Binomial, Chebychev

$$\Gamma_{\text{in}} = \sum_{n=0}^N \rho_n \exp(-j2n\theta)$$

$$\rho_n = \frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1} + Z_n}$$

$$\theta = k\Delta l$$

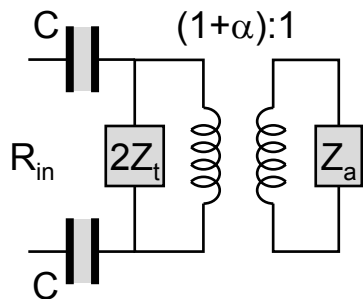
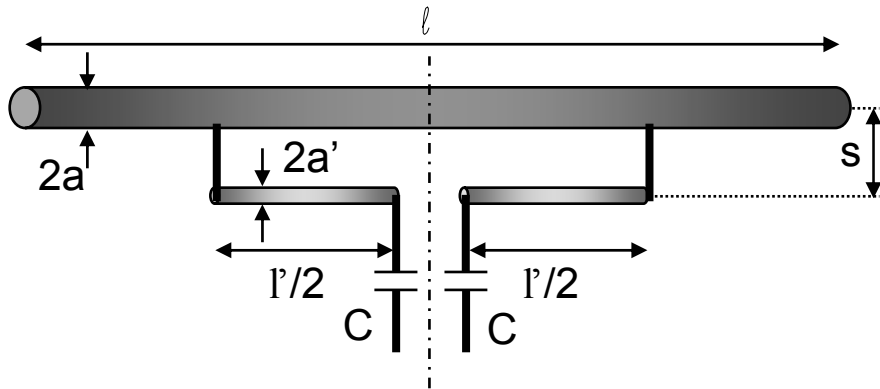


$$\text{Binomial: } \Gamma_{\text{in}} = 2^{-N} \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \sum_{n=0}^N \frac{N!}{(N-n)!n!} \exp(-j2n\theta)$$

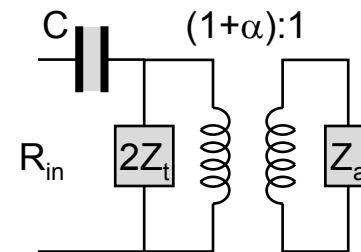
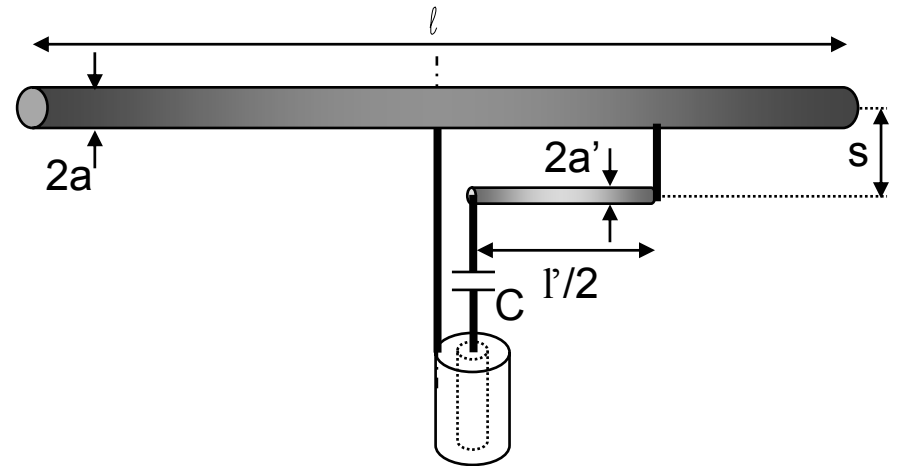
$$\text{Chebichev: } \Gamma_{\text{in}} = \exp(-jN\theta) \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \frac{T_N(\sec \theta_m \cos \theta)}{T_N(\sec \theta_m)}$$

Técnicas de Adaptación

■ Adaptador en T (T-Match)



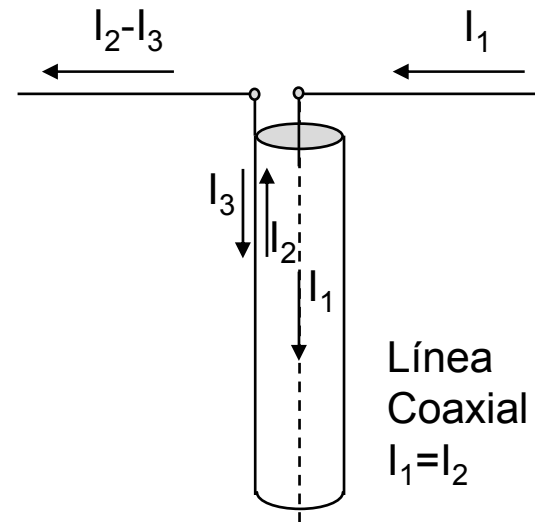
■ Adaptador en Γ (Gamma Match)



Alimentación de Dipolos

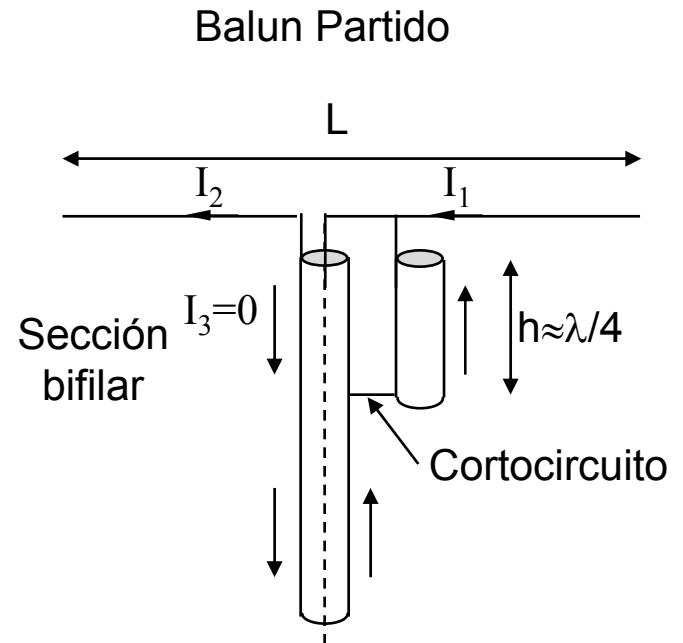
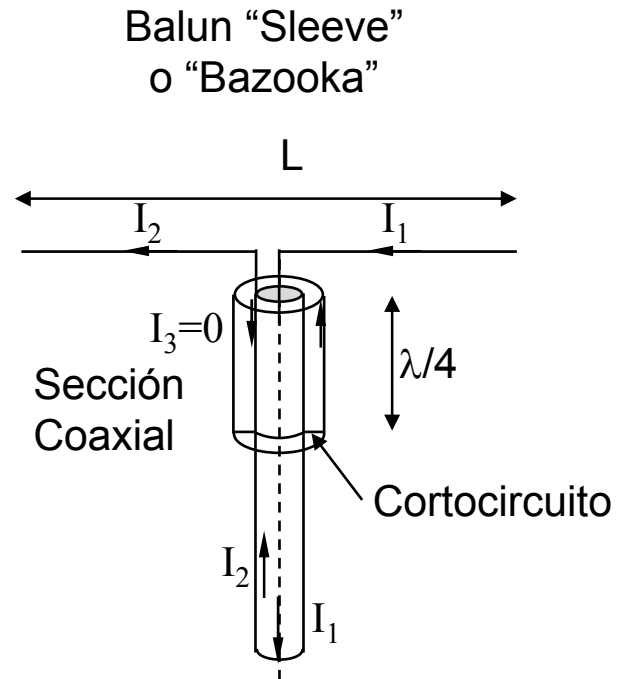
Balunes (Simetrizadores)

- Son dispositivos que transforman una línea balanceada a no balanceada como su nombre indica: “**balun**” = **balanced to unbalanced**.
- Permiten alimentar de forma equilibrada estructuras simétricas, como el dipolo, con líneas de transmisión asimétricas, como los cables coaxiales utilizados para transportar la energía desde el transmisor hasta la antena.
- En la figura el dipolo conectado directamente al coaxial no se excita de forma equilibrada a causa de la corriente I_3 que circula por el exterior del coaxial hacia tierra.



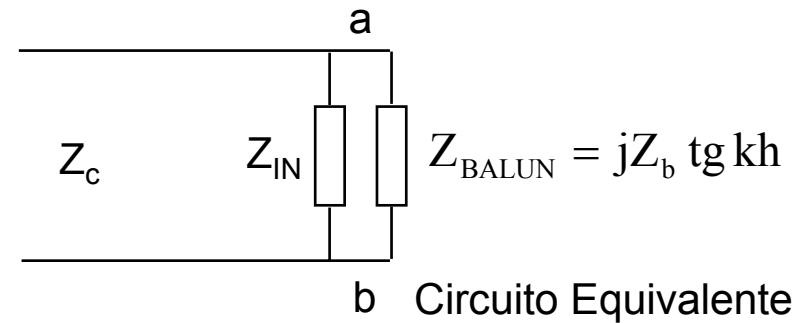
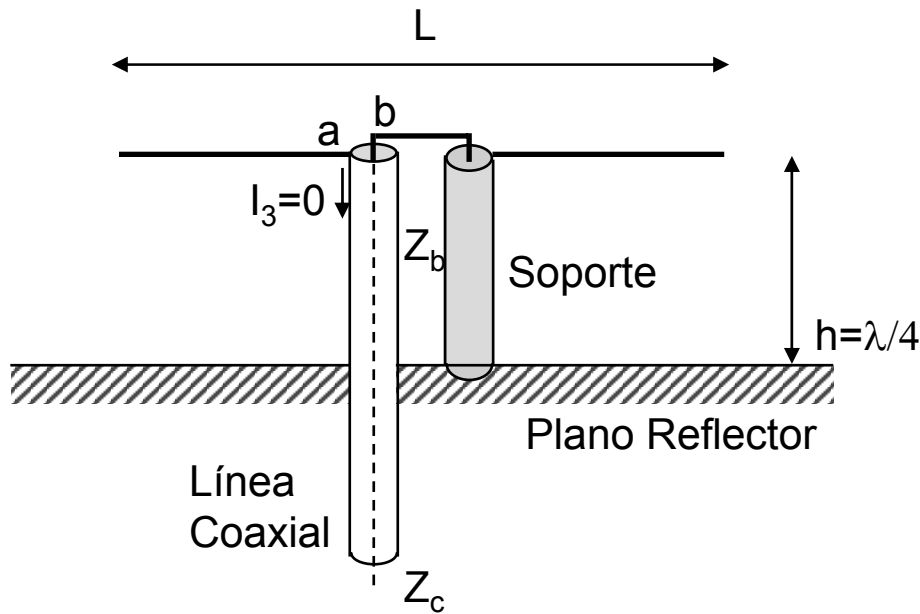
Alimentación no equilibrada

Balunes

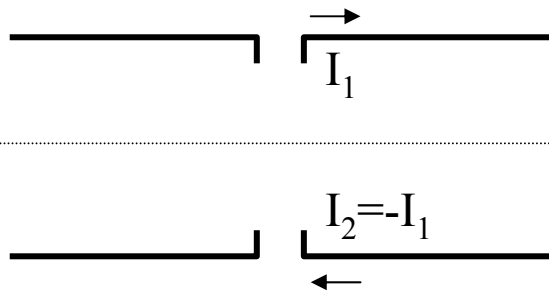


Por el exterior del conductor, si existen, las corrientes son iguales y se cancelan

Balun utilizado en paneles de dipolos



Para $h = \lambda/4 \Rightarrow Z_{BALUN} = \infty$



Aproximación de Z_{IN} aplicando imágenes:

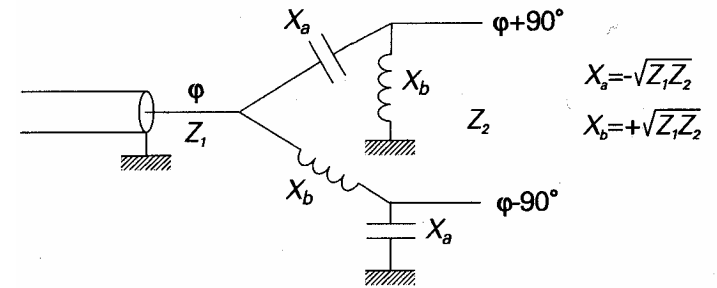
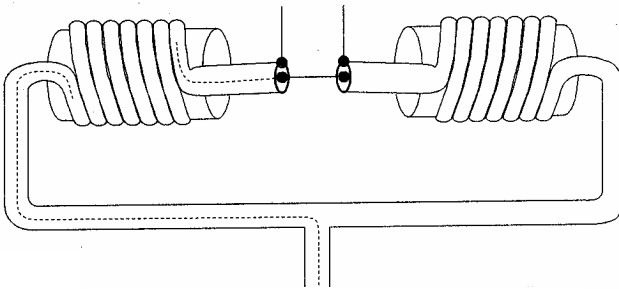
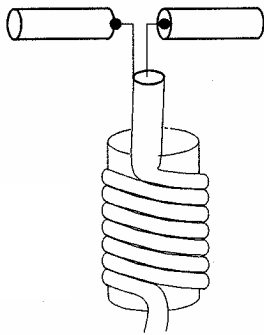
$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 = Z_{11}I_1 - Z_{12}I_1$$

$$Z_{IN} = \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} - Z_{12}$$

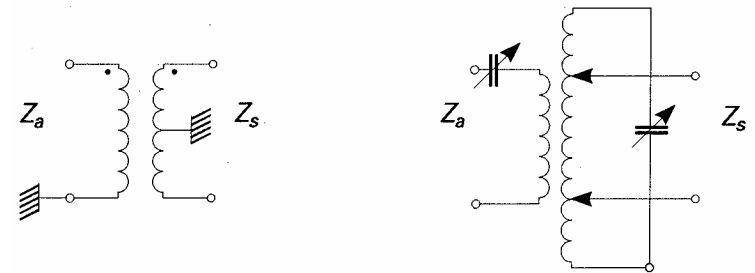
Para frecuencias $h \neq \lambda/4$, este balun continua simetrizando las corrientes, aunque $I_3 \neq 0$

Otros tipos de Balunes

Balunes de alta impedancia



Balun de elementos concentrados



Balunes tipo transformador

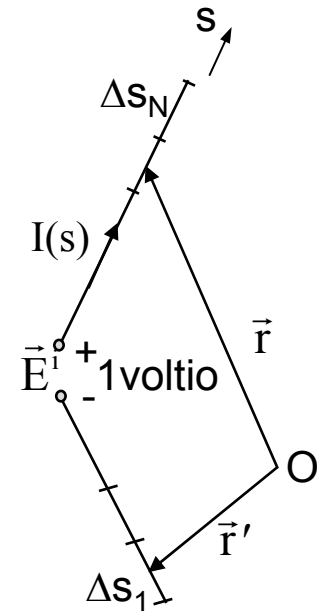
Método de los Momentos

- En su aplicación a antenas permite obtener la distribución de corrientes sobre la misma y los objetos metálicos que la rodean.
- Calcula numéricamente la distribución de corriente de una antena mediante la aplicación de la condición de contorno del campo eléctrico sobre la superficie de sus conductores:

$$\vec{E}_{\text{tangencial}} \Big|_{\text{superficie conductor}} = \vec{E}_{\text{tangencial}}^{\text{impreso}} + \vec{E}_{\text{tangencial}}^{\text{dispersado}} = 0$$

- El campo impreso (excitación) es conocido: $\mathbf{E}^i = -1v / \delta$
 » $\delta =$ hueco entre bornes de alimentación
- El campo dispersado se calcula en función de las corrientes utilizando las expresiones exactas de los potenciales, dando lugar a una ecuación integro diferencial del tipo:

$$\int I(s') K(\vec{r}, \vec{r}') ds' \Big|_{\text{tang}} = -E^i(s) \Big|_{\text{tang}}$$



Método de los Momentos

Evaluación Numérica

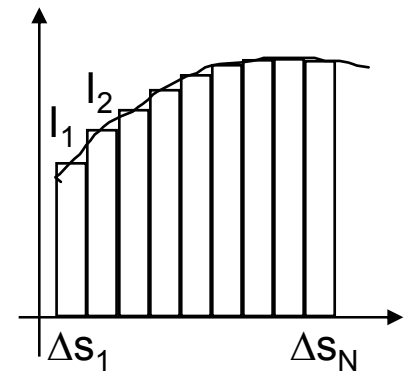
- Las incógnitas son las corrientes que descritas como una suma de funciones base $f_i(s)$ transforma la e.i. en un sistema lineal de ecuaciones donde las incógnitas son las corrientes I_i .

$$I(s') = \sum_i I_i f_i(s')$$

- El campo dispersado se conoce en función de las corrientes.

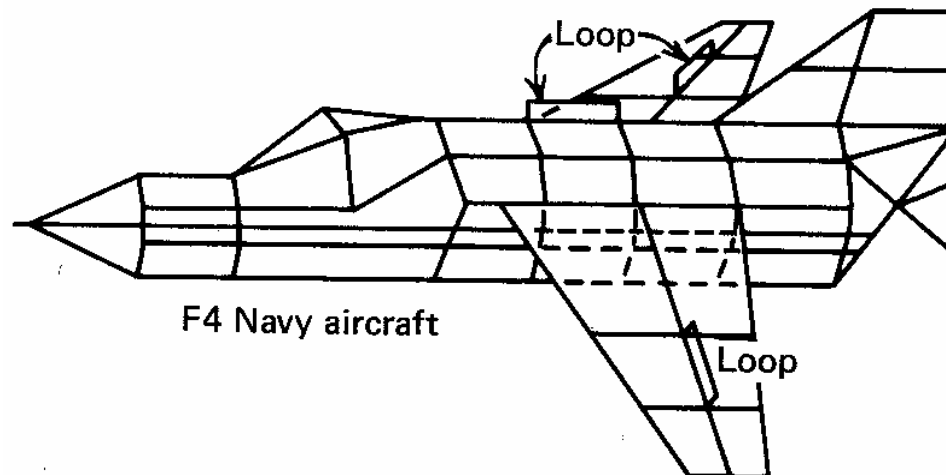
$$\int_C \sum_n I_n f_n(z') K(z_m, z') dz' = -E^{\text{impreso}}(z_m)$$

$$\sum_n I_n \int_{\Delta z'_n} K(z_m, z') dz' = -E^{\text{impreso}}(z_m)$$



Modelado por Hilos

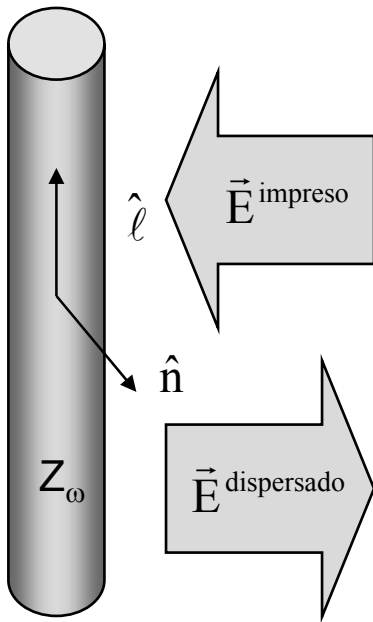
- Cualquier estructura se puede modelar como un volumen delimitado por hilos, donde prioritariamente deban circular las corrientes.
- La separación entre los hilos es tal que con el grosor de los hilos dado se “recubra” toda la superficie del cuerpo.
- Ejemplo: “modelado por hilos” de un F4.



Método de los Momentos

Planteamiento de la Ecuación

- Se plantea la ecuación que cumple las condiciones de contorno sobre los hilos:



$$\hat{n} \times (\vec{E}_{\text{fuera}} - \vec{E}_{\text{dentro}}) = 0$$

$$\vec{E}_{\text{fuera}} = \vec{E}^{\text{impreso}} + \vec{E}^{\text{dispersado}}$$

$$\vec{E}^s = -j\omega\vec{A}^s - \nabla\Phi^s \quad \vec{A}^s = \frac{\mu}{4\pi} \iint_{S'} \vec{J}_s(l') \frac{\exp(-jkR)}{R} ds'$$

$$\Phi^s = \frac{\varepsilon}{4\pi} \iint_{S'} q(s') \frac{\exp(-jkR)}{R} ds'$$

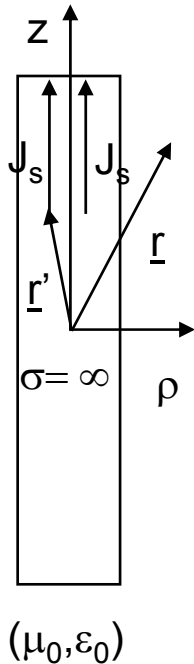
$$\vec{E}_{\text{dentro}} = Z_{\omega} I$$

Conductor Perfecto:

$$\vec{E}_{\text{tangencial}} \Big|_{\text{superficie conductor}} = \vec{E}_{\text{tangencial}}^{\text{impreso}} + \vec{E}_{\text{tangencial}}^{\text{dispersado}} = 0$$

Simplificación 1: Ecuación de Hallen

- Ecuación integral para las antenas de hilo recto delgadas ($2a \ll \lambda$) y muy largas ($2a \ll \ell$).



$$\vec{J}_s = J_{sz}(z')\hat{z}$$



$$E_z = -E_z^i$$

$$E_z = \frac{1}{j\omega\mu_0\epsilon_0} \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z \right) \quad E_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z = 0$$

$$J_z(z') = J_z(-z') \Rightarrow A_z(z')A_z(-z') \Rightarrow A_z(z') = B_1 \cos(kz') + C_1 \sin(kz')$$

$$E_z = -E_z^i \Rightarrow E_z = -\frac{j\omega\epsilon}{k} \int_0^z E_z^i(z') \text{sen}(k(z-z')) dz'$$

$$\int_{-\ell/2}^{\ell/2} I_z(z') \frac{\exp(-jkR)}{4\pi R} dz' = B_1 \cos(kz) + C_1 \sin(kz) - \frac{j\omega\epsilon}{k} \int_0^z E_z^i(z') \text{sen}(k(z-z')) dz'$$

$$R = \sqrt{(z-z')^2 + a^2}$$

Por simetría respecto $z=0$

$$\Rightarrow C_1 = 0$$

Condiciones de frontera $I|_{z=\pm\ell/2} = 0$

$$\Rightarrow B_1$$

Discretización de la Ecuación de Hallen

Modelo de Excitación

$$\int_{-\ell/2}^{\ell/2} \sum_{m=0}^N I_m |z'|^m \frac{\exp(-jkR)}{4\pi R} dz' - B_1 \cos(kz) = \frac{\omega\epsilon}{jk} \frac{V}{2} \sin(k|z|)$$

$$z = n \frac{\ell/2}{N} \quad N+1 \text{ puntos}$$

$$\sum_{m=0}^N I_m L_{nm} + B'_1 \cos\left(kn \frac{\ell/2}{N}\right) = \frac{kV}{2j\omega\mu} \sin\left(k \left| n \frac{\ell/2}{N} \right| \right)$$

$$\sum_{m=0}^N I_m (\ell/2)^m = 0$$

$$L_{nm} = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} |z'|^m \frac{\exp(-jkR)}{4\pi R} dz'$$

Discretización de la Ecuación de Hallen

Sistema de Ecuaciones

$$E_i(z') = \frac{V}{2} \delta(z') \quad -\varepsilon \leq z' \leq \varepsilon$$

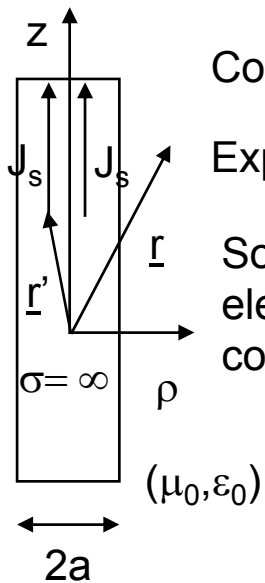
$$\int_0^z E_z^i(z') \text{sen}(k(z-z')) dz' = \begin{cases} \int_0^{-\varepsilon} \frac{V}{2} \delta(z') \text{sen}(k(z-z')) dz' & z < 0 \\ \int_0^{\varepsilon} \frac{V}{2} \delta(z') \text{sen}(k(z-z')) dz' & z < 0 \end{cases} = \frac{V}{2} \text{sen}(k|z|)$$

Distribución de Corrientes

$$I(z) = \sum_{m=0}^N I_m |z|^m$$

Simplificación 2: Ecuación Integral de Pocklington

- Ecuación integral para las antenas de hilo recto delgadas ($2a \ll \lambda$). Situando el hilo sobre el eje z: $\vec{J}_s = J_{sz}(z')\hat{z}$



Condición de Lorentz: $\frac{\partial A_z}{\partial z} = -j\omega\mu_0\epsilon_0\Phi$

Expresión del Campo $E_z = -j\omega A_z - \frac{\partial \Phi}{\partial z}$

Solución para el elemento de corriente superficial:

$$dA_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} J_{sz} dS$$

$$\psi(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$E_z = \frac{1}{j\omega\mu_0\epsilon_0} \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z \right)$$

$$dE_z = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \left(\frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial z^2} + k^2 \psi(\vec{r}, \vec{r}') \right) J_{sz} dS$$

Campo dispersado por todo el hilo:

$$E_z^s = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \iint_S \left(\frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial z^2} + k^2 \psi(\vec{r}, \vec{r}') \right) J_{sz} dS'$$

Ecuación Integral de Pocklington

- Más explícitamente:

$$E_z^s = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \oint_C \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial z^2} + k^2 \psi(\vec{r}, \vec{r}') \right) J_{sz}(z', \phi') a dz' d\phi'$$

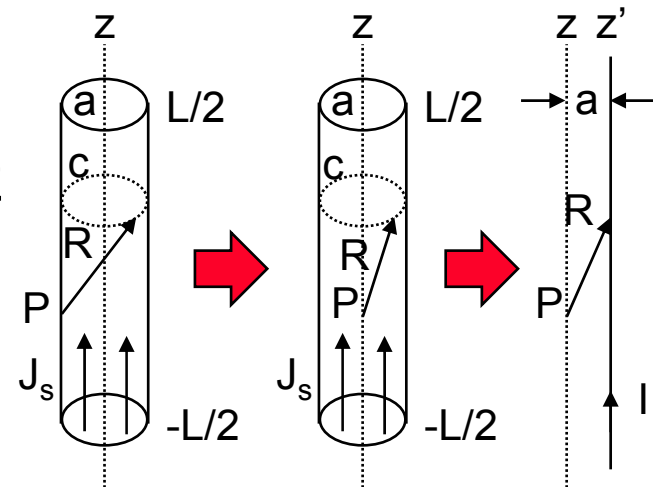
- Si $a \ll \lambda$: 1) Campo nulo sobre el eje z
2) Corriente uniforme en ϕ'

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(z - z')^2 + a^2}$$

$$E_z^s = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{\partial^2 \psi(z, z')}{\partial z^2} + k^2 \psi(z, z') \right) I(z') dz'$$

- La condición de contorno: $E_z^s + E_z^i = 0$

- Campo impreso: E_z^i
- Campo dispersado: E_z^s



$$\frac{1}{j\omega\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{\partial^2 \psi(z, z')}{\partial z^2} + k^2 \psi(z, z') \right) I(z') dz' = -E_z^i(z)$$

Ecuación Integral de 2 Potenciales (EFIE)

$\hat{n} \times (\vec{E}_{\text{fuera}} - \vec{E}_{\text{dentro}}) = 0$
 $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$

Aproximación de Hilo Fino

$\hat{l} \cdot (\vec{E}_{\text{fuera}} - \vec{E}_{\text{dentro}}) = 0$
 $R = |\vec{r}_e - \vec{a}| \approx \sqrt{r_e^2 - a^2} = R_a$

$\vec{E}_{\text{fuera}} = \vec{E}^{\text{impresso}} + \vec{E}^{\text{dispersado}}$

$\vec{E}^s = -j\omega\vec{A}^s - \nabla\Phi^s \quad \vec{A}^s = \frac{\mu}{4\pi} \int_C I(l')G(l')dl'$
 $\Phi^s = \frac{\epsilon}{4\pi} \int_C q(l')G(l')dl' \quad q(l) = \frac{j}{\omega} \frac{d}{dl} I(l)$

$G(l) = \frac{1}{2\pi a} \oint_C \frac{\exp(-jkR)}{R} dC \approx \frac{\exp(-jkR_a)}{R_a}$

$\vec{E}_{\text{dentro}} = Z_\omega I$

$$Z_\omega I(l) - \hat{l} \cdot E^i(l) = -j \int_C \left(\omega\mu \hat{l} \cdot I(l') + \frac{1}{\omega\epsilon} \frac{dI(l')}{dl'} \frac{d}{dl} \right) \frac{\exp(-jkR_a)}{R_a} dl'$$

Ajuste por Puntos (Point Matching)

Función Integral: $\int I(z')K(z, z')dz' = -E^{\text{impreso}}(z)$

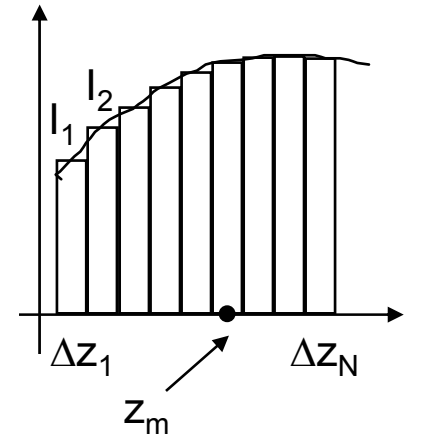
Corrientes: $I(z') \approx \sum_n I_n f_n(z')$

Función Base Tipo Pulso: $f_n(z') = \begin{cases} 1 & z' \in \Delta z'_n \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$

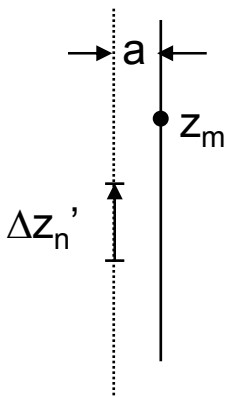
Sistema de Ecuaciones: $\int_C \sum_n I_n f_n(z')K(z_m, z')dz' = -E^{\text{impreso}}(z_m)$

$$\sum_n I_n \int_{\Delta z'_n} K(z_m, z')dz' = -E^{\text{impreso}}(z_m)$$

$$\sum_n I_n Z_{mn} = V_m \quad \begin{cases} Z_{mn} = \int_{\Delta z'_n} K(z_m, z')dz' \\ V_m = -E^{\text{impreso}}(z_m) = \begin{cases} 0 & \text{salvo} \\ 1/\Delta z_{\text{alimentacion}} \end{cases} \end{cases}$$



Punto medio del segmento m



Solución del Sistema m=n:

$$[Z_{mn}] \cdot [I_n] = [V_m] \Rightarrow [I_n] = [Z_{mn}]^{-1} [V_m]$$

Z_{mn} = Campo E_z producido en z_m por un dipolo corto $\Delta z'_n$ recorrido por 1 A

Método de los Residuos Promediados

Función Residuo: $R = \vec{E}_{\text{tangencial}}^{\text{impreso}} + \vec{E}_{\text{tangencial}}^{\text{dispersado}}$

Función Integral:

Se promedia el Residuo mediante las funciones de peso W_m $\int W_m(z)R(z)dz = 0$

Corrientes:

Se desarrollan en serie de funciones base ortogonales

$$I(z') \approx \sum_n I_n f_n(z')$$

Sistema de Ecuaciones: $\int_C W_m(z) \left(\sum_n I_n \int_{C'} f_n(z') K(z, z') dz' \right) dz + \int_C W_m(z) E^{\text{impreso}}(z) dz = 0$

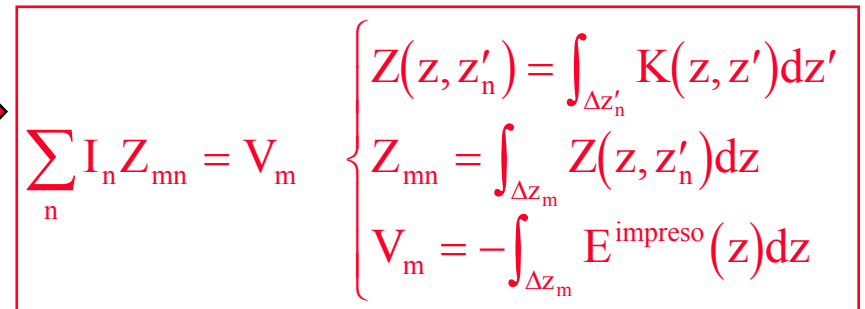
Con pulsos:

Función Base: $f_n(z') = \begin{cases} 1 & z' \in \Delta z'_n \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$

Función de Peso: $W_m(z) = \begin{cases} 1 & z \in \Delta z_m \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$

($V_m=0$ excepto V_m alimentación = 1 V)

Z_{mn} = Tensión inducida en el dipolo Δz_m en c.a. cuando se alimenta el dipolo $\Delta z'_n$ con 1 A



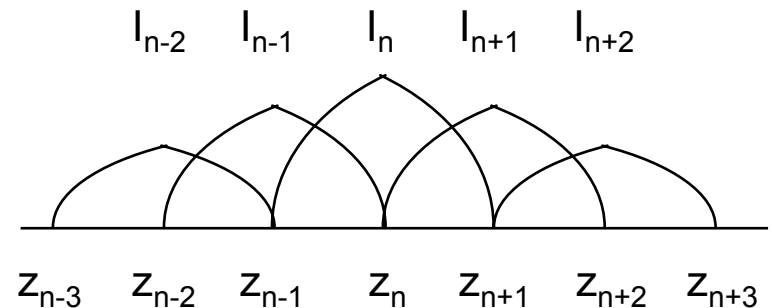
$$\sum_n I_n Z_{mn} = V_m \quad \begin{cases} Z(z, z'_n) = \int_{\Delta z'_n} K(z, z') dz' \\ Z_{mn} = \int_{\Delta z_m} Z(z, z'_n) dz \\ V_m = - \int_{\Delta z_m} E^{\text{impreso}}(z) dz \end{cases}$$

Método de Galerkin

- El Método de los Momentos se denomina de Galerkin cuando utiliza la misma función como base y peso.
- Otras funciones utilizadas: Armónicos cosenoidales y polinomios extendidos sobre todo el hilo, triángulos, etc.
 - Una buena implementación se consigue empleando funciones triangulares sinusoidales:

$$F_n(z) = \hat{z} \frac{\text{sen}(k(z - z_{n-1}))}{\text{sen}(k(z_n - z_{n-1}))} \quad z_{n-1} \leq z < z_n$$

$$F_n(z) = \hat{z} \frac{\text{sen}(k(z_{n+1} - z))}{\text{sen}(k(z_{n+1} - z_n))} \quad z_n \leq z < z_{n+1}$$



Se suele tomar $z_{n+1} - z_n = z_n - z_{n-1} = \Delta z_n$ para todo n (segmentación regular).

Modelado de la Fuente Impresa

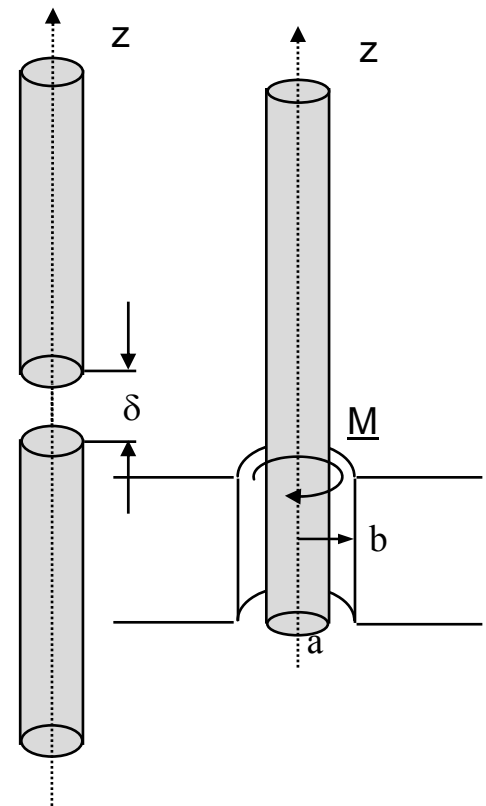
- Modelo de generador “delta gap”
 - Una tensión V entre los extremos de las varillas del dipolo crea un campo impreso confinado en ese hueco:
- Modelo del Generador tipo “frill”.
 - Supone unas corrientes magnéticas equivalentes a una excitación de un monopolo mediante un coaxial.

$$\vec{E}^i = -V/\delta \hat{z}$$

$$\vec{M} = -\hat{n} \times E^i = -V/\delta \hat{\phi}$$

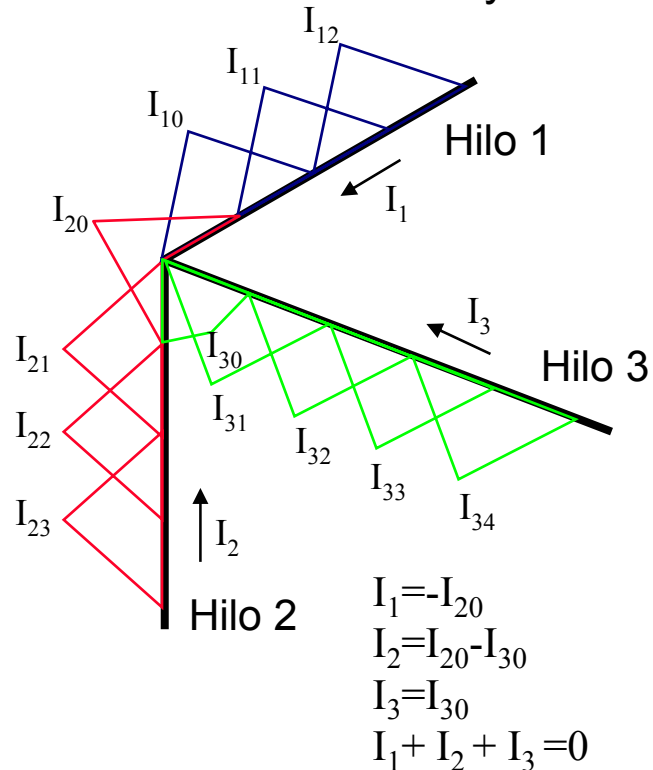
$$\vec{E}^i \Big|_{\text{eje}} \approx -\frac{V}{2 \ln(b/a)} \left[\frac{\exp(-jkR_1)}{R_1} - \frac{\exp(-jkR_2)}{R_2} \right] \hat{z} \quad \begin{aligned} R_1 &= \sqrt{z^2 + a^2} \\ R_2 &= \sqrt{z^2 + b^2} \end{aligned}$$

- Los resultados finales obtenidos son prácticamente iguales



Uniones entre hilos

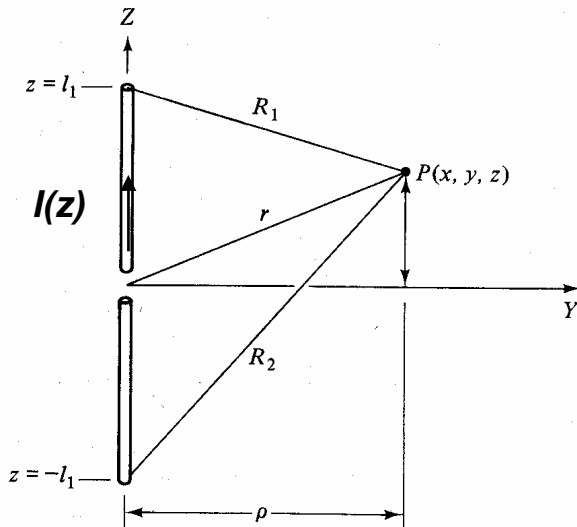
- 1ª Ley de Kirchoff
 - Método de Chao y Strait



- Redistribución de carga
 - Método de Sayre y Curtis
 - Imponen condiciones de continuidad a la derivada de la corriente (la carga)
 - » Sayre: La densidad de carga lineal sobre los segmentos del nodo es constante.
 - » Curtis: La densidad superficial de la carga es constante.
 - Se imponen nuevas condiciones en la matriz de impedancias.

Método de la F.E.M. inducida

- Permite obtener las expresiones de Z_{mn} con corrientes triangulares sinusoidales.
 - Se pueden utilizar las expresiones clásicas de impedancias mutuas entre dipolos paralelos recorridos por corrientes sinusoidales (vease Elliot pp 325 y ss.)
- Campo de un dipolo recorrido por corriente sinusoidal.



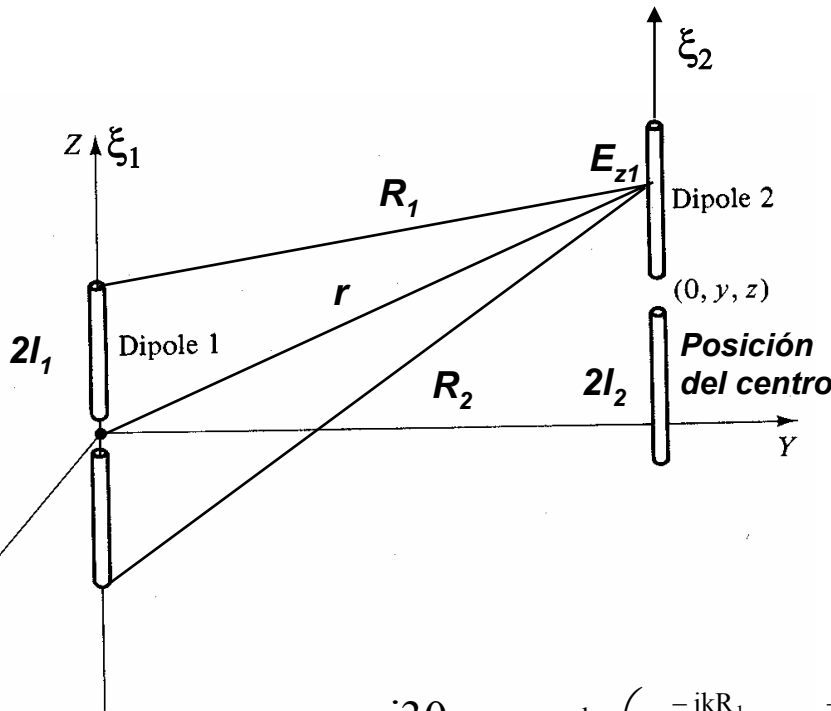
$$I(z) = I_M \text{sen } k(1_1 - |z|)$$

Para cualquier punto P:

$$E_z = -j30I_m \left(\frac{e^{-jkR_1}}{R_1} + \frac{e^{-jkR_2}}{R_2} - 2 \cos kl_1 \frac{e^{-jkr}}{r} \right)$$

$$E_\rho = j30I_m \left(\frac{z-1_1}{\rho} \frac{e^{-jkR_1}}{R_1} + \frac{z+1_1}{\rho} \frac{e^{-jkR_2}}{R_2} - (2 \cos kl_1) \frac{z}{\rho} \frac{e^{-jkr}}{r} \right)$$

Impedancias Mutuas entre Dipolos Paralelos



$$r = \sqrt{y^2 + (z + \xi_2)^2}$$

$$R_1 = \sqrt{y^2 + (z + \xi_2 - l_1)^2}$$

$$R_2 = \sqrt{y^2 + (z + \xi_2 + l_1)^2}$$

Tensión en c.a. en 2 (Método fem):

$$V_{2c.a.} = \frac{-1}{I_2(0)} \int_{-l_2}^{l_2} I_2(\xi_2) E_{z1}(\xi_2) d\xi_2$$

$$Z_{21} = \frac{V_{2c.a.}}{I_1(0)} \quad \text{y sustituyendo:}$$

$$Z_{21} = \frac{j30}{\text{sen } kl_1 \text{ sen } kl_2} \int_{-l_2}^{l_2} \left(\frac{e^{-jkR_1}}{R_1} + \frac{e^{-jkR_2}}{R_2} - 2 \cos kl_1 \frac{e^{-jkr}}{r} \right) \text{sen } k(1_2 - |\xi_2|) d\xi_2$$

En el programa MOMENTOS se utiliza esta formulación para calcular las autoimpedancias y las impedancias mutuas entre los diversos segmentos de los dipolos.

Gráficas de Impedancias Mutuas

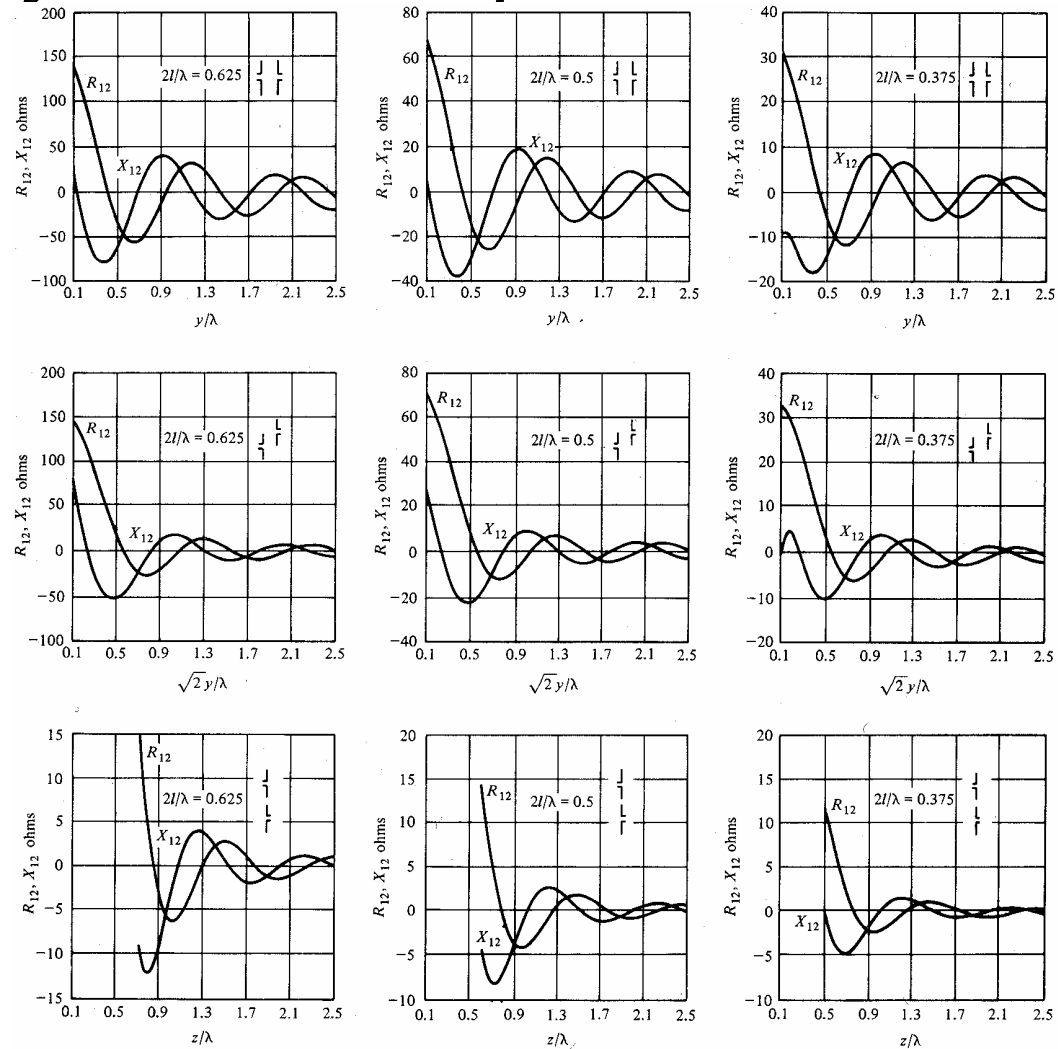
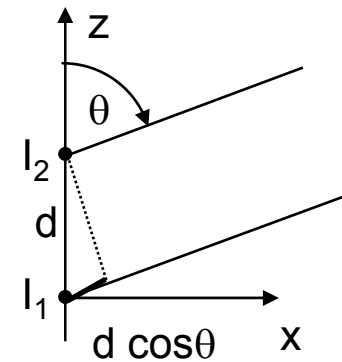
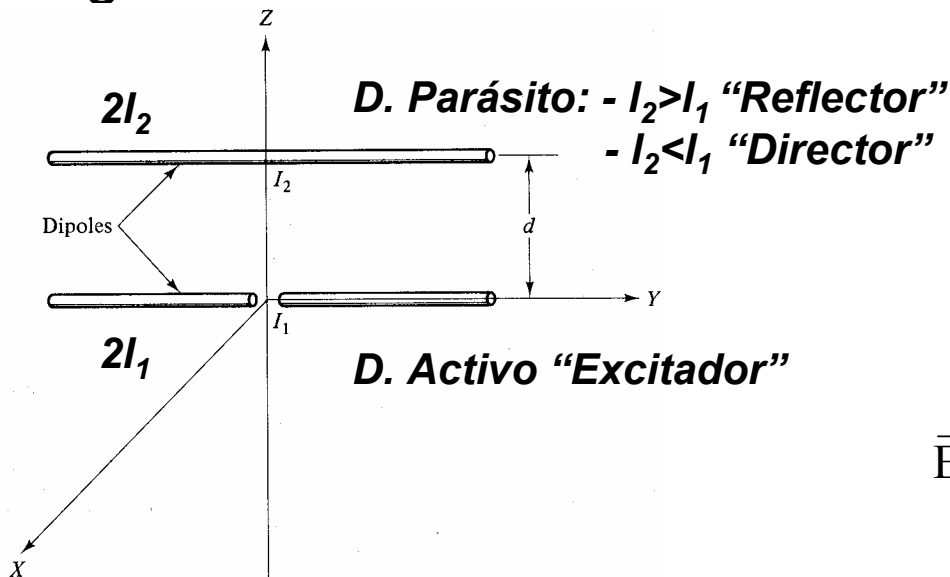


Fig. 7.24 The Mutual Impedance Between Two Identical Slender Center-Fed Cylindrical Dipoles versus Their Separation Along Various Paths; Rectangular Plots

Antenas Yagi

- Son antenas construidas con dipolos paralelos , en las que sólo se alimenta uno (“excitador”, activo) de forma directa, haciéndolo los demás (“parásitos”, cortocircuitados) a través del acoplamiento mutuo con el primero.
- Yagi de 2 elementos.



$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \approx \left(1 + \frac{I_2}{I_1} e^{jkd \cos \theta} \right) \cdot \vec{E}_d(\theta, \phi)$$

Yagi de 2 elementos

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ 0 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned} \quad \frac{I_2}{I_1} = -\frac{Z_{12}}{Z_{22}}$$

$$Z_{IN} = \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}}$$

TABLE 8.4 Mutual impedance versus spacing between two parallel dipoles: $2l_2/\lambda = 0.475$

d/λ	Z_{12} ohms		
	$2l_2/\lambda = 0.450$	$2l_2/\lambda = 0.475$	$2l_2/\lambda = 0.500$
0.10	53.94 1.52°	58.19 3.22°	62.78 4.98°
0.15	49.08 -9.38°	52.73 -8.45°	56.62 -7.50°
0.20	44.42 -21.93°	47.67 -21.42°	51.12 -20.90°
0.25	40.23 -35.53°	43.18 -35.28°	46.30 -35.02°
0.30	36.55 -49.91°	39.26 -49.82°	42.11 -49.73°
0.35	33.35 -64.87°	35.84 -64.89°	38.47 -64.91°
0.40	30.57 -80.32°	32.86 -80.40°	35.31 -80.48°
0.45	28.14 -96.14°	30.28 -96.26°	32.56 -96.38°
0.50	26.04 -112.25°	29.02 -112.40°	30.16 -112.56°

Variación lenta con l_2/λ

TABLE 8.5 Self-impedance of a cylindrical dipole versus length (King-Middleton corrected second-order approximation;

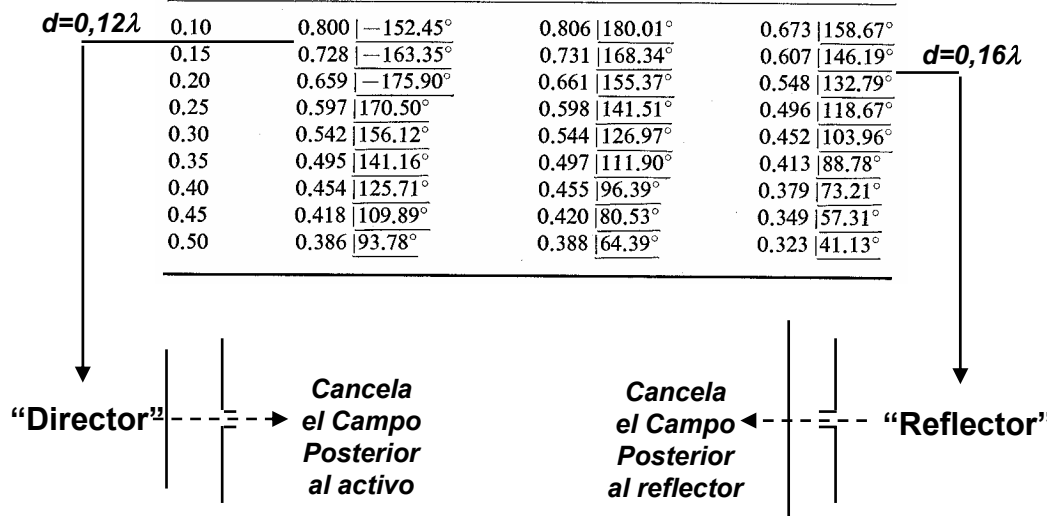
$(a_2/\lambda = 0.0032)$

Variación rápida con l_2/λ

$2l_2/\lambda$	Z_{22} ohms
0.450	60.56 - j29.58 = 67.40 -26.03°
0.475	72.06 + j 4.04 = 72.17 3.21°
0.500	83.60 + j41.34 = 93.26 26.31°

TABLE 8.6 Relative current versus spacing for two parallel dipoles, one driven, one parasitic: $2l_1/\lambda = 0.475$

d/λ	$I_2/I_1 = -Z_{12}/Z_{22}$		
	$2l_2/\lambda = 0.450$	$2l_2/\lambda = 0.475$	$2l_2/\lambda = 0.500$
0.10	0.800 -152.45°	0.806 180.01°	0.673 158.67°
0.15	0.728 -163.35°	0.731 168.34°	0.607 146.19°
0.20	0.659 -175.90°	0.661 155.37°	0.548 132.79°
0.25	0.597 170.50°	0.598 141.51°	0.496 118.67°
0.30	0.542 156.12°	0.544 126.97°	0.452 103.96°
0.35	0.495 141.16°	0.497 111.90°	0.413 88.78°
0.40	0.454 125.71°	0.455 96.39°	0.379 73.21°
0.45	0.418 109.89°	0.420 80.53°	0.349 57.31°
0.50	0.386 93.78°	0.388 64.39°	0.323 41.13°

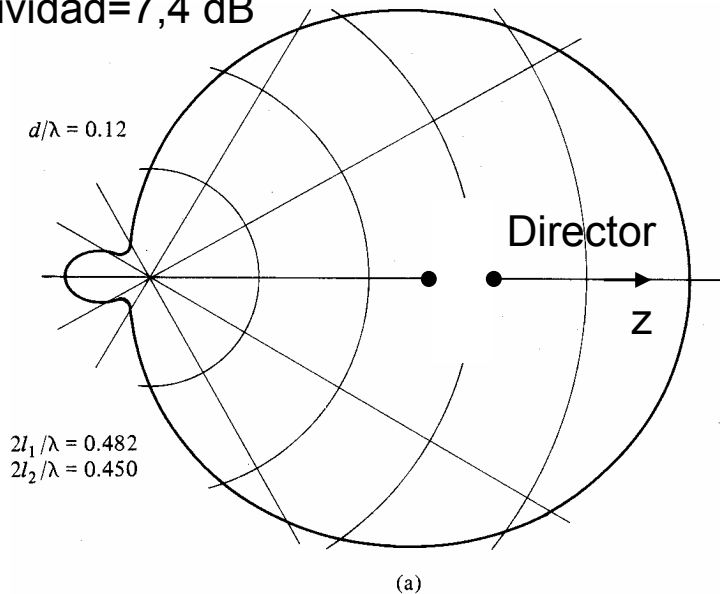


Yagi de 2 elementos

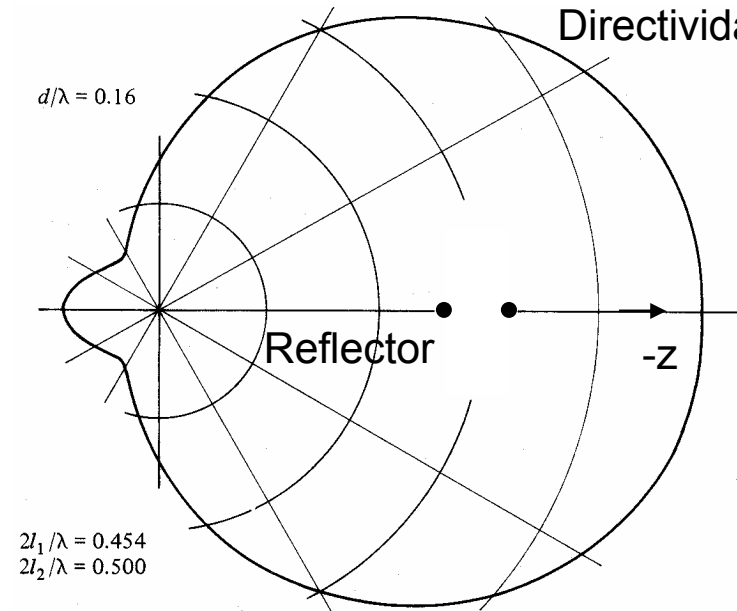
Diagramas Plano H

Plano XZ: $E_d(\theta, \phi=0)=cte$; $F(\theta, \phi=0)=|1+I_2/I_1 \exp(jkdcos\theta)|$

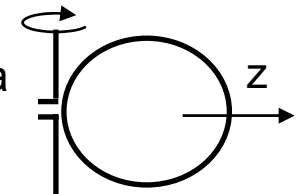
Directividad=7,4 dB



Directividad=7 dB

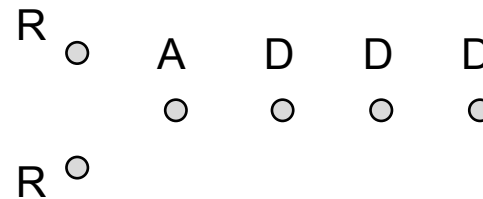
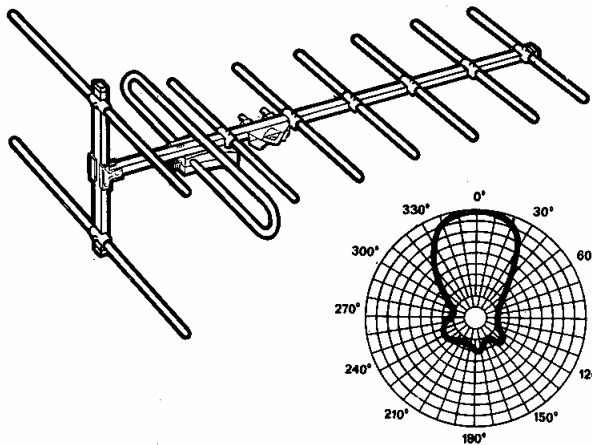


Plano E (Plano YZ): Estos diagramas deben multiplicarse por el diagrama propio del dipolo $\lambda/2$



Otras configuraciones de Yagis

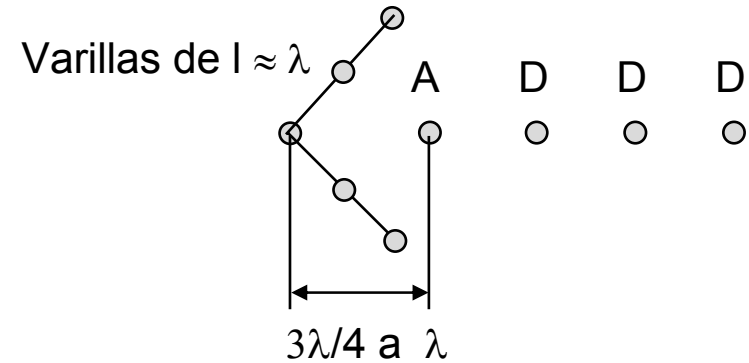
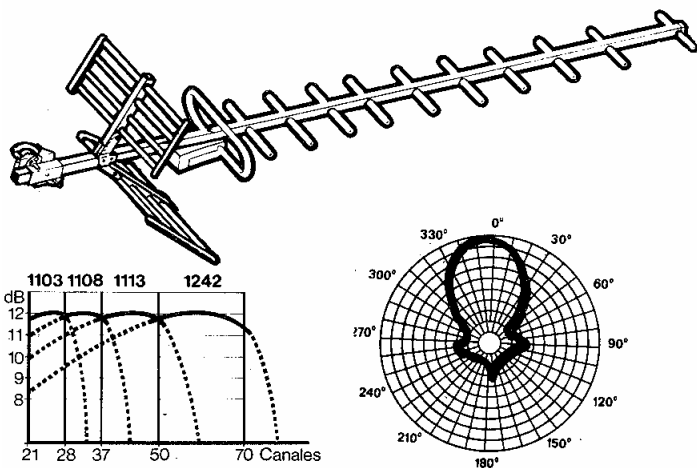
Yagi de doble reflector



Como elemento activo es frecuente utilizar un dipolo doblado para aumentar la impedancia de entrada y el ancho de banda

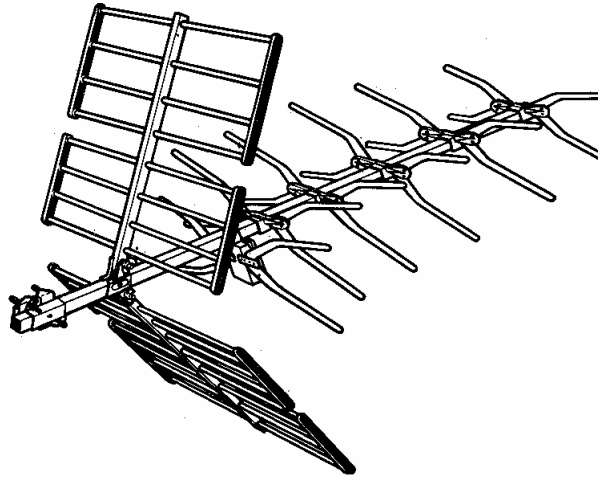
Otras configuraciones de Yagis

Yagi con reflector diédrico



Otras configuraciones de Yagis

Yagi de cuernos



Estos elementos de cuernos aumentan el ancho de banda

Ejemplos de Diseño

Table 9.6 OPTIMIZED LENGTHS OF PARASITIC ELEMENTS FOR YAGI-UDA ANTENNAS OF SIX DIFFERENT LENGTHS

$2a/\lambda =$

$d/\lambda = 0.0085$ $s_{12} = 0.2\lambda$		LENGTH OF YAGI-UDA (IN WAVELENGTHS)					
		0.4	0.8	1.20	2.2	3.2	4.2
LENGTH OF REFLECTOR (l_1/λ)		0.482	0.482	0.482	0.482	0.482	0.475
LENGTH OF DIRECTOR, λ	l_3	0.424	0.428	0.428	0.432	0.428	0.424
	l_4		0.424	0.420	0.415	0.420	0.424
	l_5		0.428	0.420	0.407	0.407	0.420
	l_6			0.428	0.398	0.398	0.407
	l_7				0.390	0.394	0.403
	l_8				0.390	0.390	0.398
	l_9				0.390	0.386	0.394
	l_{10}				0.390	0.386	0.390
	l_{11}				0.398	0.386	0.390
	l_{12}				0.407	0.386	0.390
	l_{13}					0.386	0.390
	l_{14}					0.386	0.390
	l_{15}					0.386	0.390
	l_{16}					0.386	
l_{17}					0.386		
SPACING BETWEEN DIRECTORS (s_{ik}/λ)		0.20	0.20	0.25	0.20	0.20	0.308
GAIN RELATIVE TO HALF-WAVE DIPOLE (dB)		7.1	9.2	10.2	12.25	13.4	14.2
DESIGN CURVE (SEE FIGURE 9.17)		(A)	(B)	(B)	(C)	(B)	(D)

D=

$D_0 = 2,16 + D$ dBi

SOURCE: Peter P. Vezbicke, *Yagi Antenna Design*, NBS Technical Note 688, December 1968.

Ejemplos de Diseño

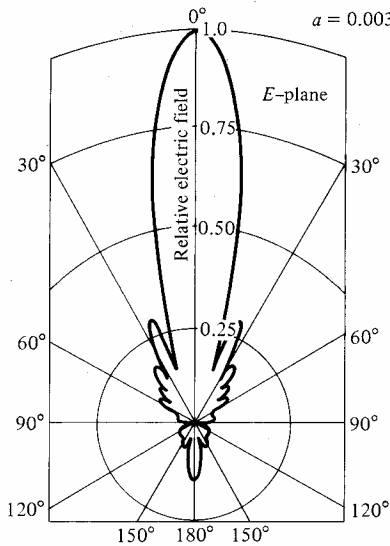
Table 5-4 Characteristics of Equally Spaced Yagi-Uda Antennas

N , no. of elements	Spacing (wavelengths)	Element Lengths			Gain (dB)	Front to back ratio (dB)	Input impedance (ohms)	H-Plane		E-Plane	
		Reflector, L_R (wavelengths)	Driver, L (wavelengths)	Directors, L_D (wavelengths)				HP_H (degrees)	SLL_H (dB)	HP_E (degrees)	SLL_E (dB)
3	0.25	0.479	0.453	0.451	9.4	5.6	$22.3 + j15.0$	84	-11.0	66	-34.5
4	0.15	0.486	0.459	0.453	9.7	8.2	$36.7 + j9.6$	84	-11.6	66	-22.8
4	0.20	0.503	0.474	0.463	9.3	7.5	$5.6 + j20.7$	64	-5.2	54	-25.4
4	0.25	0.486	0.463	0.456	10.4	6.0	$10.3 + j23.5$	60	-5.8	52	-15.8
4	0.30	0.475	0.453	0.446	10.7	5.2	$25.8 + j23.2$	64	-7.3	56	-18.5
5	0.15	0.505	0.476	0.456	10.0	13.1	$9.6 + j13.0$	76	-8.9	62	-23.2
5	0.20	0.486	0.462	0.449	11.0	9.4	$18.4 + j17.6$	68	-8.4	58	-18.7
5	0.25	0.477	0.451	0.442	11.0	7.4	$53.3 + j6.2$	66	-8.1	58	-19.1
5	0.30	0.482	0.459	0.451	9.3	2.9	$19.3 + j39.4$	42	-3.3	40	-9.5
6	0.20	0.482	0.456	0.437	11.2	9.2	$51.3 - j1.9$	68	-9.0	58	-20.0
6	0.25	0.484	0.459	0.446	11.9	9.4	$23.2 + j21.0$	56	-7.1	50	-13.8
6	0.30	0.472	0.449	0.437	11.6	6.7	$61.2 + j7.7$	56	-7.4	52	-14.8
7	0.20	0.489	0.463	0.444	11.8	12.6	$20.6 + j16.8$	58	-7.4	52	-14.1
7	0.25	0.477	0.454	0.434	12.0	8.7	$57.2 + j1.9$	58	-8.1	52	-15.4
7	0.30	0.475	0.455	0.439	12.7	8.7	$35.9 + j21.7$	50	-7.3	46	-12.6

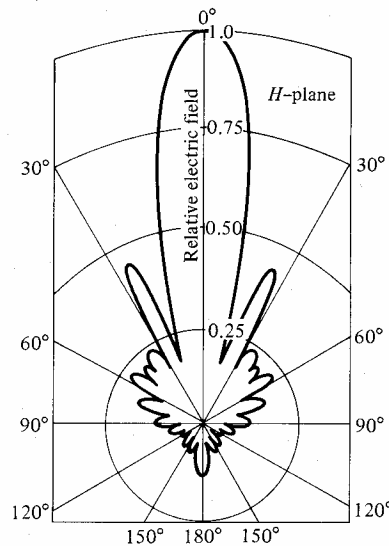
Conductor diameter = 0.005λ .

Ejemplo de Diseño- Yagi de 27 Elementos

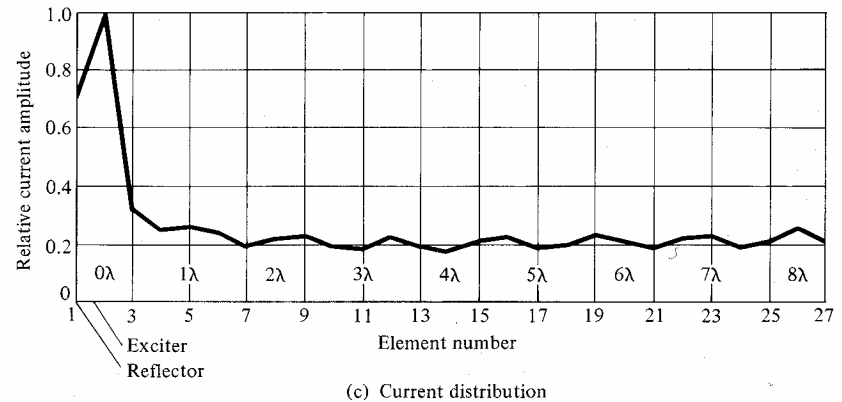
$N = 27$
 $l_1 = 0.50\lambda$
 $l_2 = 0.47\lambda$
 $l_i = 0.406\lambda, i = 3, 4, \dots, 27$
 $s_{12} = 0.125\lambda$
 $s_{ik} = 0.34\lambda, i = 2, 3, \dots, 26$
 $k = 3, 4, \dots, 27$
 $a = 0.003\lambda$



(a) E-plane pattern



(b) H-plane pattern



(c) Current distribution

Figure 9.14 E- and H-plane patterns and relative current amplitudes of a 27-element Yagi-Uda array. (SOURCE: G. A. Thiele, "Analysis of Yagi-Uda-Type Antennas," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. AP-17, pp. 24-31, January 1969. © (1969) IEEE)

La corriente se mantiene constante sobre los directores porque los excita la propia onda "endfire" radiada.

$$D_0 \approx 22 \text{ dB}$$